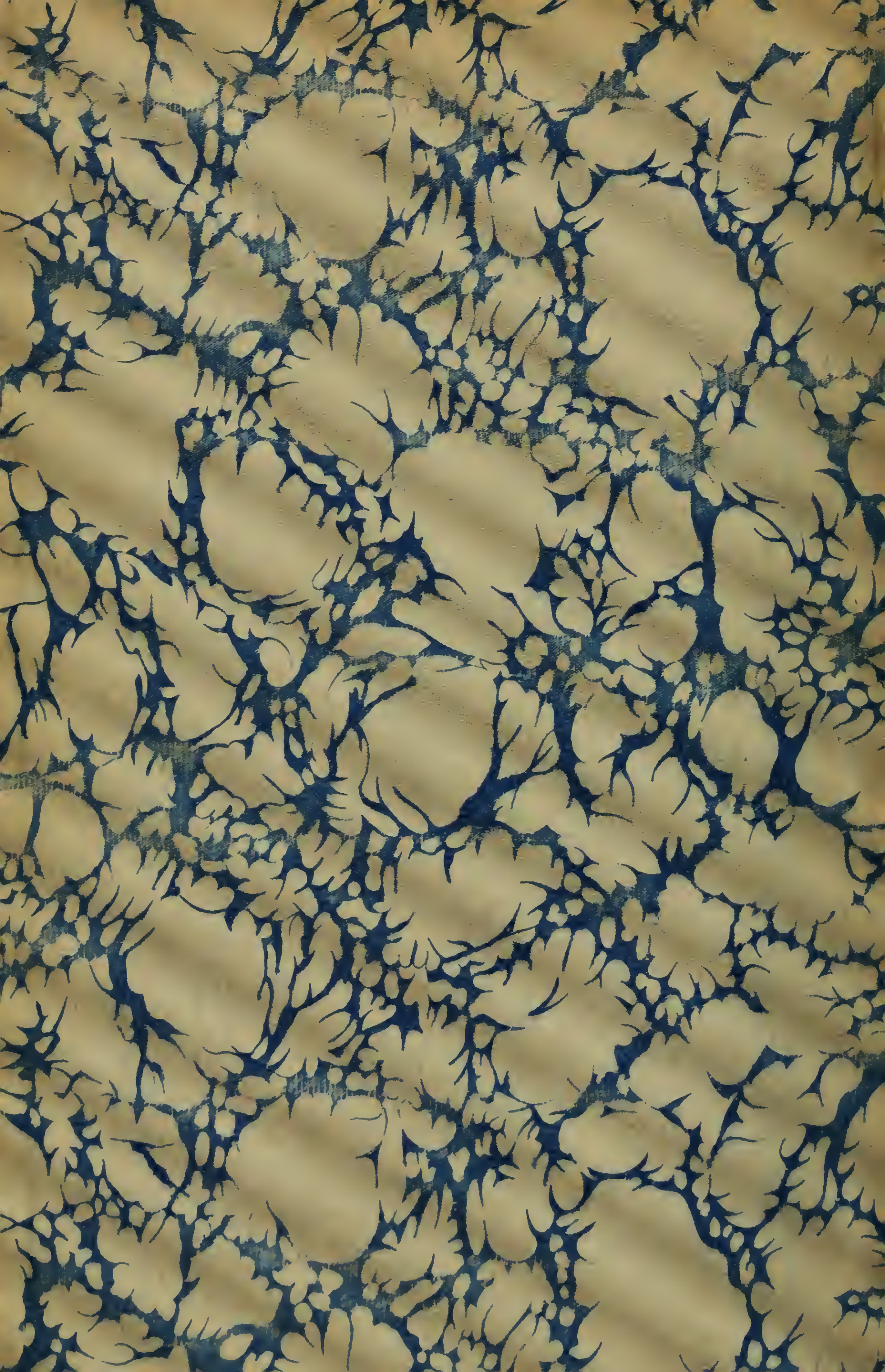
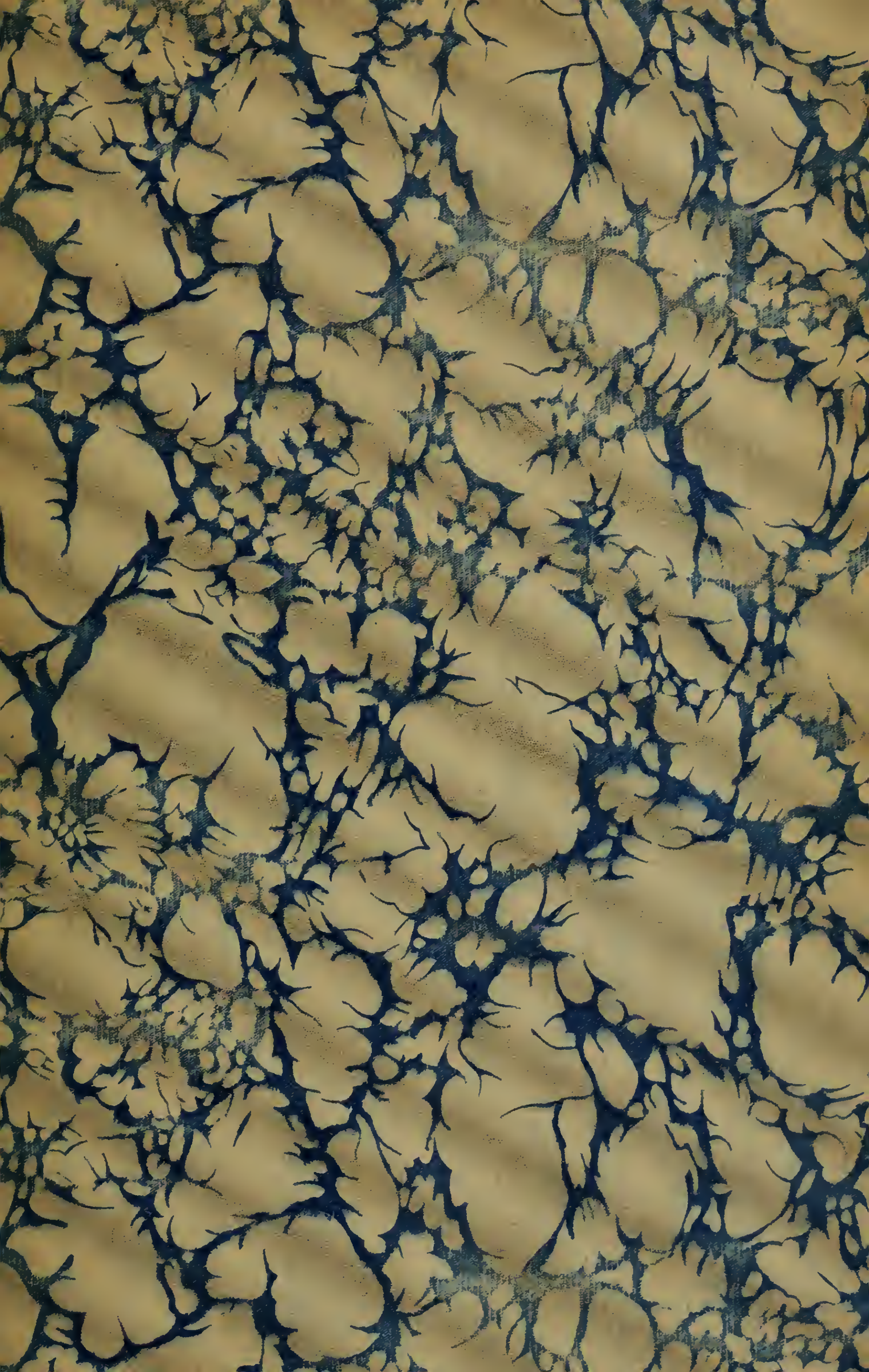






BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 4, Paris, VIe.

59615 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX.

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLIII. — ANNÉE 1919.

(LIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (ÉMILE). — LEÇONS SUR LES FONCTIONS MONOGÈNES UNIFORMES D'UNE VARIABLE COMPLEXE, rédigées par *Gaston Julia*. 1 vol. in-8, XII-166 pages. Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1917.

L'objet de ce petit Livre est d'approfondir la notion de *fonction monogène* introduite par Cauchy, qui comprend celle de *fonction analytique* au sens de Weierstrass, mais qui ne se confond pas avec elle. Le but qui est poursuivi, et que l'on atteint au dernier Chapitre, c'est la définition et la représentation analytique des fonctions *monogènes* uniformes (nulle part *analytiques*) dans un domaine convenablement défini, dit *domaine* C (du nom de Cauchy). Dans ce domaine C, les fonctions monogènes non analytiques jouissent de la propriété fondamentale des fonctions analytiques, elles n'admettent qu'un seul prolongement : *Si deux fonctions sont monogènes dans un domaine* C *et si, en tout point d'un arc arbitrairement petit intérieur à ce domaine elles coïncident ainsi que toutes leurs dérivées, elles coïncident dans tout le domaine* C.

Comme tous les autres Livres de la Collection de Monographies publiée par M. Borel, celui-ci doit pouvoir se suffire à lui-même. Aussi le premier Chapitre est-il consacré au rappel des notions classiques indispensables pour la suite : domaines de Weierstrass (ou domaines W), notion de fonction monogène ou analytique

dans un domaine W, représentations diverses d'une fonction analytique définie dans un domaine W, intégrale de Cauchy, séries de Taylor, de Laurent.

Dans le Chapitre II, on voit apparaître l'instrument analytique qui jouera le rôle fondamental dans tout le cours de l'Ouvrage : la *série de polynomes*. Il ne s'agit ici encore que de la représentation d'une fonction $f(z)$ monogène dans un *domaine* W (et par suite *analytique* dans ce domaine). On part de l'intégrale de Cauchy et, par l'intermédiaire d'une série de fractions rationnelles, on la transforme en une série de polynomes, en supposant le domaine W simplement connexe. Après quelques exemples simples, M. Borel montre que de tout développement de $\frac{1}{1-u}$ en série de polynomes, se déduit, grâce à l'intégrale de Cauchy, un développement de $f(z)$ valable dans une région intérieure à W, qui dépend du domaine (du plan des u) dans lequel la série génératrice converge vers $\frac{1}{1-u}$.

A chaque développement de $\frac{1}{1-u}$ en série de polynomes correspond une *classe de séries de polynomes*, comprenant toutes les séries qu'on en déduit en faisant varier la fonction $f(z)$. Deux espèces de classes sont surtout mentionnées :

1° Celles qui s'introduisent dans les recherches de M. Borel sur les *séries divergentes*, et leur *région de sommabilité ;*

2° Les classes de *séries* (M), introduites par M. Mittag-Leffler, qui représentent $f(z)$ dans toute *l'étoile relative à cette fonction*.

Mais, et c'est une des conséquences les plus remarquables de l'introduction des séries (M) qu'expose le Chapitre III, *une série* M *peut converger même hors de l'étoile précédente, et hors du domaine* W *où la fonction* $f(z)$ *existe selon Weierstrass*.

Qu'on imagine, en effet, un ensemble dénombrable de points a_n partout denses sur le cercle C de centre O, de rayon 1, et qu'on choisisse des nombres A_n tels que la série $\Sigma|A_n|$ soit très rapidement convergente, les $|A_n|$ décroissant assez vite (suivant un mode précisé dans l'exposition), alors *on peut former une série de polynomes* $\Sigma P_n(z)$ *qui convergera sur une droite au moins issue de* O *dans tout angle de sommet* O, *si petit soit-il, et qui*

convergera uniformément sur tout segment fini de cette droite vers la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$.

Ce résultat dépasse le point de vue weierstrassien puisque la fonction $f(z)$ définie à l'intérieur de C par la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$ n'est pas prolongeable à l'extérieur de C selon Weierstrass.

L'instrument analytique que constitue la série (M) permet donc un prolongement là où la théorie de Weierstrass reste impuissante. C'est donc aux séries (M) qu'il faudra s'adresser pour représenter les fonctions monogènes plus générales qu'on étudie ici.

Mais au préalable, il convient de définir avec précision les nouveaux domaines C, où seront définies ces fonctions monogènes *non analytiques*.

Il faut d'abord étudier soigneusement les propriétés des *ensembles de mesure nulle*. A leur étude est consacré tout le Chapitre IV. La notion fondamentale est ici celle d'*ensemble régulier*. Un ensemble de mesure nulle est dit *régulier* lorsqu'il peut être défini de la façon suivante :

« Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ une infinité énumérable de points, dits *points fondamentaux ;* à chaque entier h faisons correspondre une infinité de carrés (ou cercles) (¹) $C_1^h, C_2^h, \ldots, C_n^h, \ldots$ dont les aires forment une série convergente, tels que C_n^h contienne à son intérieur C_n^{h+1} et tende vers A_n lorsque h devient infini. Soit E_h l'ensemble des points intérieurs aux carrés C_n^h $(n = 1, 2, \ldots)$; l'ensemble des points intérieurs à tous les E_h $(h = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble *régulier*. »

Tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier : ceci justifie l'introduction des ensembles réguliers.

Des propriétés des fractions continues on conclut que, si les A_n sont les points rationnels, *quelque rapide que soit la décroissance des* C_n^h *en fonction de h, l'ensemble régulier a la puissance du continu*. Mais, *ceci est encore vrai quels que soient les* A_n, pourvu qu'on les suppose *partout denses* dans le domaine

(¹) Si l'ensemble est linéaire, les C_n^h seront des intervalles, et, au lieu de leurs aires, on considérera leurs longueurs.

linéaire ou superficiel où ils sont répartis. Pour établir cette propriété fondamentale, on montre qu'il est possible de faire correspondre biunivoquement les points de deux ensembles dénombrables partout denses en respectant l'*ordre des coordonnées* et la *continuité*, de façon aussi que les *distances* et les *angles* correspondants *soient entre eux dans un rapport compris entre deux limites fixes*.

La correspondance s'étend par continuité à tous les points de l'aire qui contient les A_n; elle transforme un ensemble régulier de mesure nulle en un ensemble régulier. La proposition établie lorsque les A_n sont les points rationnels s'étend alors facilement à des A_n quelconques. *Tout ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont partout denses dans une aire a la puissance du continu.*

Arrivant aux domaines C, (Chap. V), on imaginera des A_n *partout denses dans une aire* $\mathcal{A}$. Chaque A_n sera le centre d'un cercle $S_n^{(h)}$ de rayon $r_n^{(h)}$. Les cercles $S_n^{(h)}$ peuvent être choisis *sans point commun deux à deux*. Les aires $S_n^{(h)}$ ($n = 1, 2, \ldots$) forment une série convergente, et $r_n^{(h)}$ tend vers zéro quand h grandit indéfiniment. L'ensemble $C^{(h)}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ extérieurs à tous les $S_n^{(h)}$. $C^{(h)}$ est parfait, d'un seul tenant, $C^{(h)}$ est contenu dans $C^{(h+1)}$. *Le domaine* C *contient par définition tout point qui appartient à un* $C^{(h)}$ et n'en contient pas d'autre. C n'est pas parfait, car les A_n sont points limites de C sans appartenir à C. Le complémentaire $\mathcal{A} - C$ de C est régulier, de mesure nulle; ayant la puissance du continu, il contient d'autres points que les A_n. Aucun point de C n'est intérieur à C *au sens de Weierstrass*.

« $f(z)$ sera *monogène dans* C : 1° si elle est *continue dans* C, elle l'est alors *uniformément*; 2° si, en tout point z de C, le rapport $\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$ tend *uniformément* vers une *limite unique* lorsque z' tend vers z en restant dans C. »

Si K est une courbe simple fermée dont tous les points appartiennent à C, on montre que

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_n \int_{S_n^{(p)}} f(z)\,dz,$$

la sommation du deuxième membre s'étend à tous les cercles $S_n^{(p)}$

(p fixe mais quelconque), intérieurs à la courbe K. C'est l'extension du *théorème fondamental de Cauchy*. On en déduit, x étant un point de C intérieur à K,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum_n \frac{1}{2\pi i}\int_{S_n^p} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

La monogénéité entraîne alors l'existence *des dérivées de tous les ordres pour* $f(z)$.

Mais ceci exige que les rayons $r_n^{(h)}$ *décroissent assez vite avec* h *et* n :

$$\frac{r_n}{2^{h+1}} < r_n^{(h)} < \frac{r_n}{2^h},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\log\log\log \frac{1}{r_n}} = 0.$$

On montre enfin que, dans ces conditions, on peut, à l'aide seulement des valeurs *de* $f(x)$ *et de toutes ses dérivées en un point* x_0, *former une série* (M) *qui converge vers* $f(x)$ *dans un domaine* Γ *dont tous les points appartiennent à* C. [Γ est défini comme C à l'aide des points A_n par des rayons $\rho_n^{(h)}$ tendant moins rapidement vers zéro que les $r_n^{(h)}$]. Ceci est la base de la notion de prolongement : on en déduit que, *si deux fonctions monogènes dans* C *coïncident en tout point d'un arc arbitrairement petit intérieur à* Γ, *elles coïncident dans tout* Γ *et par suite dans tout* C.

Dans C se trouvent ainsi *définies et représentées analytiquement par une série* (M) des fonctions monogènes non analytiques. La monogénéité, mise par Cauchy à la base de la théorie des fonctions de variable complexe, est plus vaste que la conception de Weierstrass.

Deux Notes « sur l'extension de la formule de Green aux ensembles parfaits discontinus » et « sur la théorie du potentiel logarithmique » terminent ce Volume qui est le dernier paru de la Collection publiée par M. Borel.

G. J.

ENRIQUES (F). — Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, pubblicate per cuba del Dott, *O. Chisini.* Vol. II (Leçons sur la théorie géométrique des équations et des fonctions algébriques). 1 vol. in-8. 713 pages. Bologne, N. Zanichelli, 1918.

Nous écrivions, dans ce *Bulletin* (avril 1916), à propos du premier Volume de l'Ouvrage de M. Enriques, que cet Ouvrage comblait une vraie lacune, parce que les traités similaires de Salmon et de Clebsch sont aujourd'hui bien vieillis. Cette impression est confirmée par le second Volume, et surtout par la seconde Partie de celui-ci, où se trouve traitée pour la première fois d'une façon complète, la théorie si délicate des points singuliers des courbes algébriques planes.

Le Volume débute par un exposé de la théorie élémentaire des courbes planes basée sur la polarité. Après avoir étudié les courbes covariantes d'une courbe algébrique, le problème des intersections de deux courbes et les formules de Plücker, M. Enriques consacre un Chapitre à la cubique plane et donne des études sur la détermination des branches réelles des courbes algébriques planes, sur le principe de Poncelet et sur la Géométrie énumérative.

Cette première Partie contient de nombreux aperçus très suggestifs sur des théories connexes aux matières traitées dans l'Ouvrage. C'est ainsi qu'à propos de la théorie généralisée des formes polaires et de la représentation des formes par des sommes de puissances, l'auteur donne la théorie du pentaèdre de Sylvester (surfaces cubiques). Plus loin, on trouve quelques détails sur le problème des variétés algébriques, ainsi que sur l'extension aux courbes gauches des formules de Plücker (formules de Cayley).

Le théorème d'Harnack sur le nombre des branches réelles d'une courbe algébrique est démontré de trois manières différentes ; la dernière, basée sur la représentation de Riemann des points d'une courbe algébrique, est particulièrement simple et élégante. C'est la même que celle donnée par Léry dans son Mémoire posthume (*Ann. Éc. Norm.*, 1916).

Il n'était pas possible, dans un Ouvrage tel que celui-ci, de passer sous silence le principe de la conservation du nombre tant à cause des polémiques auxquelles son application a donné lieu

dans ces dernières années qu'en raison de son importance. Sorti des travaux des Poncelet, De Jonquières, Cremona, Chasles, Cayley, etc, le principe de la conservation du nombre avait été énoncé par M. H. Schubert sous la forme suivante :

Étant donnée une variété algébrique ∞^k *d'éléments géométriques* Γ, *auxquels on impose une condition algébrique de dimension* k *définie par des relations déterminées entre l'élément* Γ *et un élément déterminé* Γ', *le nombre (fini) d'éléments* Γ *satisfaisant à cette condition ne varie pas lorsque l'on particularise l'élément* Γ' *(sauf toutefois si ce nombre devient infini).*

Ce principe fut attaqué vers 1904 par différents géomètres qui montrèrent que son application, faite sans discernement, peut parfois conduire à des résultats inexacts. M. Severi a déterminé, il y a quelques années, dans quelles conditions le principe pouvait être employé. *Le principe subsiste pour des conditions algébriques irréductibles, ou réductibles à une somme de conditions irréductibles de la même dimension.*

Le principe de la conservation du nombre, ainsi que ses applications à différents problèmes importants de Géométrie projective, sont étudiés dans l'Ouvrage de M. Enriques.

L'étude des singularités des courbes algébriques planes forme l'objet de la deuxième Partie du Volume. On sait que cette étude a été abordée par de nombreux géomètres et suivant deux méthodes : l'une, arithmétique, due à Puiseux, et à laquelle Halphen a apporté de notables contributions, est basée sur le développement en séries de puissances d'une variable des coordonnées d'un point singulier d'une courbe algébrique ; l'autre, géométrique, imaginée par M. Noether, se fonde sur la transformation d'une courbe plane en une autre douée de points multiples à tangentes distinctes au moyen de transformations quadratiques. Le développement de ces deux méthodes fait l'objet des deux premiers Chapitres. M. Enriques, dans le troisième Chapitre, aborde le problème par une nouvelle méthode, fondée sur l'étude des conditions différentielles qui caractérisent le passage d'une courbe par une série de points infiniment voisins avec des multiplicités données. Au cours de ces trois Chapitres, M. Enriques utilise des représenta-

tions schématiques des points singuliers qui facilitent beaucoup l'étude de ceux-ci.

Un dernier Chapitre est consacré aux singularités des courbes gauches et des surfaces algébriques. Mais, alors que l'analyse des points singuliers des courbes gauches est relativement facile, il n'en est pas de même de celle des points singuliers d'une surface. L'exposé que M. Enriques fait de cette dernière question montre les difficultés du problème et est de nature à susciter des recherches dans cette voie. Signalons enfin une Note sur la classification des homographies hyperspatiales, terminant le Chapitre et où ce problème est relié à l'étude des singularités.

Le second Volume de l'Ouvrage de M. Enriques rendra, croyons-nous, les plus grands services, non seulement aux étudiants, mais aussi à tous ceux qui cultivent la Géométrie. Il est plein de résultats nouveaux et, à chaque page, on retrouve la marque de l'esprit critique de l'auteur des *Problemi della Scienza*.

Un troisième Volume terminera l'Ouvrage et contiendra l'exposé de la théorie des courbes algébriques telle que l'ont développée les géomètres italiens dans ces dernières années.

L. Godeaux.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU DERNIER THÉORÈME DE POINCARÉ;

Par M. E. Gau.

La proposition dont il s'agit, énoncée par Poincaré en 1912 [1] et à laquelle il attachait tant d'importance, a été démontrée pour la première fois en 1913 par M. G.-D. Birkhoff [2] en em-

[1] *Rendic. del Circ. mat. di Palermo*, t. XXXIII, p. 375-407.
[2] Voir *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XLII, 1914, p. 1-12.

ployant la voie indirecte. La démonstration directe a été tentée par M.-T. Dantzig [1], mais son essai est loin d'être satisfaisant et M. Birkhoff en a fait une critique trop justifiée pour qu'il soit utile d'y revenir [2].

C'est pourquoi je me propose, dans ce qui suit, d'exposer une démonstration directe, d'ailleurs élémentaire; elle est basée sur des considérations tout à fait différentes de celles qui ont guidé les auteurs précédents et qui ont leur source dans un élégant travail de M. Goursat [3]; ces considérations permettent d'arriver à écrire effectivement les équations des transformations de Poincaré.

Le théorème à démontrer est le suivant [4] :

Considérons la couronne comprise entre les deux circonférences concentriques (c) et (C), de rayons a et b respectivement ($b > a$), et une transformation ponctuelle (T) de cette couronne satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Elle est continue et biunivoque dans la couronne et sur le contour;*

2° *Elle conserve les aires;*

3° *Elle transforme en elles-mêmes les circonférences (C) et (c);*

4° *Elle dévie les points de (C) dans un certain sens, toujours le même, et ceux de (c) en sens contraire :*

Dans ces conditions, il y a au moins un point (et par suite deux) de l'anneau qui reste invariant dans la transformation (T).

La dernière condition n'est pas clairement exprimée; cependant il est certain, d'après le Mémoire de Poincaré (et M. Birkhoff l'a admis implicitement), qu'il faut l'entendre comme il suit.

---

(1) *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XLI, 1917, p. 53-58.

(2) *Id.*, t. XLII, 1918, p. 41-43.

(3) *Sur les transformations ponctuelles qui conservent les volumes* (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XLI, 1917, p. 211-222).

(4) M. Birkhoff a démontré que le cas plus général où la condition (2) serait remplacée par celle de l'existence d'un invariant intégral positif quelconque, ainsi que le cas où le contour serait constitué par deux courbes fermées quelconques, se ramènent à celui-ci (*loc. cit.*)

Définissons un point M par des coordonnées polaires ρ et ω, ayant pour pôle le centre O des deux circonférences, *le rayon vecteur ρ étant essentiellement positif;* soient r et θ ($r > 0$) les coordonnées du transformé M'; la quatrième condition revient à dire que l'on peut choisir ω et θ de manière que la déviation ($\omega - \theta$) soit de signes contraires sur (C) et (c), tout en satisfaisant aux autres conditions.

Remarquons en outre qu'il résulte des conditions (1) et (3) que tout point de la couronne aura pour transformé un point situé également dans la couronne.

Soient alors

$$\rho = f(r, \theta), \qquad \omega = \varphi(r, \theta)$$

les équations d'une transformation (T). La première dépend certainement de r sans quoi la troisième condition ne pourrait être vérifiée; la transformation devant être biunivoque, nous pourrons toujours prendre les équations de la transformation (T) sous la forme

$$(1) \qquad r = F(\rho, \theta), \qquad \omega = \Phi(\rho, \theta).$$

Écrivons d'abord que cette transformation conserve les aires :

$$\rho = r\frac{D(r, \theta)}{D(\rho, \omega)}$$

d'où l'on tire

$$2\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial(F^2)}{\partial\rho}.$$

Les variables ρ et r étant positives, il n'y a aucune difficulté à les remplacer par

$$x = \rho^2, \qquad X = r^2;$$

les fonctions F et Φ deviennent alors des fonctions de x et de θ, et la condition précédente s'écrit sous la forme simple :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial(F^2)}{\partial x};$$

en appelant U (x, θ) une certaine fonction de x et de θ, on aura donc

$$X = F^2 = \frac{\partial U}{\partial\theta},$$

$$\omega = \Phi = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Il sera plus commode de poser

$$U = x\theta + V(x, \theta)$$

et les équations d'une transformation (T) seront nécessairement de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} X = x + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \omega = \theta + \dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

M. Birkhoff a fait remarquer que les expressions $(X - x)$ et $(\omega - \theta)$ étaient des fonctions uniformes de θ dans la couronne; voici sa démonstration, adaptée aux notations des formules (2).

Supposons que, X restant constant, θ augmente de 2π; le point M′ et par suite le point M reprennent les mêmes positions; donc x reprend sa valeur initiale tandis que ω varie de $2k\pi$ (k entier).

Cela prouve

1° Que $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ admet pour θ la période 2π;

2° Que l'expression $\dfrac{\partial V(x, \theta + 2\pi)}{\partial x} - \dfrac{\partial V(x, \theta)}{\partial x}$ est toujours égale à un multiple entier de 2π; or il est évident, d'après les hypothèses faites, que cette expression est continue; donc elle a une valeur *constante*.

Or plaçons M′ sur le cercle (c) en faisant $X = a^2$; si le point M′ décrit (c) en se déplaçant toujours dans le même sens, le point M décrira la même circonférence (c) sans passer deux fois par la même position; il en résulte que M décrira (c) une seule fois en se déplaçant toujours dans le même sens que le point M′ d'après la quatrième condition. Dans cette opération, $\omega - \theta$ reste donc invariant et par suite la constante de tout à l'heure est nulle.

Donc $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ admet aussi la période 2π pour la variable θ.

La fonction $V(x, \theta)$ n'intervenant que par ses dérivées du premier ordre, qui sont définies et continues dans la couronne, on peut toujours la supposer définie et continue elle-même dans le même domaine; d'autre part, les deux dérivées admettant la période 2π, on aura

$$V(x, \theta) = W(x, \theta) + K\theta,$$

W étant une fonction périodique en θ et K une constante.

Considérons enfin la troisième condition : elle s'exprime en disant que $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ est nul identiquement si l'on y fait $x = a^2$ ou $x = b^2$; par exemple :

$$\frac{\partial W(a^2, \theta)}{\partial \theta} + K = 0.$$

Or la dérivée de la fonction périodique $W(a^2, \theta)$ ne peut pas être constante, à moins que cette constante ne soit nulle.

Donc $K = 0$ et $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ s'annule identiquement pour $x = a^2$ et $x = b^2$; il s'ensuit que, pour ces deux valeurs de x, W prend des valeurs constantes A et B respectivement ; on peut écrire par conséquent :

$$V(x, \theta) = W(x, \theta) = \Psi(x, \theta) + A\frac{x - b^2}{a^2 - b^2} + B\frac{x - a^2}{b^2 - a^2},$$

Ψ admettant la période 2π pour θ et devenant identiquement nulle pour $x = a^2$ et $x = b^2$.

En résumé, toute transformation (T) sera définie par les équations (2) où V a la forme ci-dessus ; mais pour satisfaire complètement aux quatre conditions imposées, il faudra en outre que la fonction Ψ admette des dérivées partielles du premier et du second ordre définies dans la couronne (y compris le contour), qu'elle donne à $\frac{\partial V}{\partial x}$ des signes contraires sur les circonférences c et C et enfin que la transformation ainsi obtenue soit biunivoque dans le domaine considéré.

Dans ces conditions, il est clair que la fonction V, qui est constante sur les cercles limites et dont la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ a des signes constants et contraires sur ces cercles, prend à l'intérieur de la couronne des valeurs situées en dehors de l'intervalle (A, B) ; par suite, elle admet un maximum ou un minimum pour un système au moins de valeurs (x, θ). Pour ces valeurs on aura :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

et par suite

$$X = x \quad \text{et} \quad \omega = \theta,$$

c'est-à-dire un point invariant dans la transformation (T).

On voit que la démonstration précédente subsisterait même si la déviation $(\omega - \theta)$ était nulle sur les cercles (C) et (c), sauf dans le voisinage de deux points situés sur un même rayon, l'un sur C l'autre sur c (et d'un même côté de O), où la condition (4) serait vérifiée; dans ce cas, il y aurait encore un point invariant à l'intérieur de la couronne.

SUR UN POINT D'HISTOIRE DES GROUPES FINIS DISCONTINUS;

Par M. G.-A. MILLER.

Dans deux Notes insérées en 1900 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3ᵉ série, t. XIX, p. 508), M. Michael Bauer, à Budapest, a établi le théorème suivant :

Soit $\mathfrak{h}$ *un groupe d'ordre*

$$n = p^{\alpha} m, \qquad (m, p) = 1.$$

Si le groupe $\mathfrak{h}$ *a des sous-groupes invariants d'ordre* $\frac{n}{p}$, *alors leur nombre est* $\frac{p^{\alpha-\gamma}-1}{p-1}$, *p étant un nombre premier.*

Ce théorème fut appelé *Bauer's Theorem* par Harold Hilton dans son Ouvrage important : *Introduction to the theory of groups of finite order* (1908, p. 145), et il est attribué à Michael Bauer dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (t. I, vol. 1, p. 588). La locution *Bauer's Theorem* se trouve aussi dans le Livre *Theory and Applications of Finite Groups* par G.-A. Miller, H.-F. Blichfeldt et L.-E. Dickson (1916, p. 124).

Il faut observer que ce n'est pas M. Bauer qui, le premier, a démontré ce théorème utile. Au contraire, G. Bagnera, dans une Note parue deux ans auparavant (*Atti R. Accad. Lincei Rendic.*, 5ᵉ série, t. VII, p. 63) en a fourni une démonstration qui est à l'abri de toute objection. Au lieu de *Théorème de Bauer* il serait donc plus juste de dire *Théorème de Bagnera.*

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE FREDHOLM;

Par M. Henri VILLAT.

Les principales propriétés du système des deux équations intégrales

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{g(y)\,dy}{\tang\dfrac{x-y}{2}} + C_1, \\[2ex] g(y) = \quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f(z)\,dz}{\tang\dfrac{y-z}{2}} + C_2 \end{cases}$$

sont bien connues. Rappelons notamment que divers travaux de Ch. Hermite [1], de T. Stieltjes [2] sont relatifs à d'importants résultats concernant la première de ces équations; ces résultats se rattachent à certains développements dus à Henri Poincaré [3]. Plus récemment, M. P. Fatou, dans sa Thèse [4], a précisé au sujet des équations (1) diverses propriétés essentielles. Dans un Mémoire paru en 1916 [5], j'ai été amené à envisager également ce même système, et à en démontrer quelques particularités.

Dans ces équations (1) il faut, bien entendu, considérer les seconds membres comme remplacés par leurs valeurs principales (au sens de Cauchy). Ces équations appartiennent au type d'équations intégrales de Fredholm, de première espèce, mais singulières à cause de la présence de pôles simples dans les noyaux. L'un des plus remarquables caractères de ce système (1) est que les deux formules qu'il contient sont réciproques, chacune des deux entraînant l'autre dans des conditions très générales qui ont été précisées ailleurs (*cf.* les travaux cités plus haut). Cependant

---

(1) *American Journal of Mathematics*, t. IX, 1887, p. 381; *Œuvres complètes*, t. IV, p. 241.

(2) *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, t. I, p. 207 et suiv.

(3) *Comptes rendus*, t. XCVI, 1883, p. 1134.

(4) *Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 335.

(5) *Acta mathematica*, t. XL, p. 101-178.

on ne peut pas dire que l'une des équations donne la solution de l'autre, à proprement parler, car les quantités C_1 et C_2 qui y interviennent sont bien des constantes, indépendantes de x ou y, mais elles ne sont pas indépendantes de la forme des fonctions f ou g elles-mêmes ([1]), C_1 dépend de f, et C_2 dépend de g. On a explicitement

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y)\, dy.$$

J'ai été conduit à généraliser en quelque sorte les résultats concernant les équations (1) ou plutôt à démontrer certaines propriétés d'un système beaucoup plus compliqué que le système (1), mais présentant avec ce dernier une analogie de structure marquée, avec des différences fondamentales. Comme ces propriétés m'ont été d'une grande utilité pour la résolution de certains problèmes dont on trouvera ailleurs l'exposé, j'indiquerai ici brièvement ces résultats qui, du point de vue de l'Analyse pure, pourront sembler de quelque intérêt.

J'envisagerai les deux équations suivantes :

$$(2) \quad f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} g(y)[-\zeta(ix - iy) - \zeta(ix + iy) + \zeta_1(ix - iy) + \zeta_1(ix + iy) - \zeta_2(ix - iy) - \zeta_2(ix + iy) + \zeta_3(ix - iy) + \zeta_3(ix + iy)]\, dy,$$

$$(3) \quad g(y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} f(z)[-\zeta(iy - iz) + \zeta(iy + iz) - \zeta_1(iy - iz) + \zeta_1(iy + iz) + \zeta_2(iy - iz) - \zeta_2(iy + iz) + \zeta_3(iy - iz) - \zeta_3(iy + iz)]\, dz,$$

dans lesquelles les fonctions ζu, $\zeta_1 u$, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ sont les fonctions elliptiques bien connues, construites avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$. Comme ci-dessus, les valeurs des seconds membres doivent être entendues comme égales à leurs valeurs principales. Dans ces formules ne figurent pas, aux seconds membres, de constantes

([1]) H. Villat, *loc. cit.*, p. 108.

additives. Comme pour les équations (1) on a là deux équations de Fredholm, singulières, de première espèce, et la singularité polaire des noyaux interdit l'application, à ces équations, de la théorie générale des équations de première espèce, due à M. E. Picard (¹) et à ses continuateurs (²).

Je me propose d'abord de faire voir que, en supposant $2\omega_1$ réel, et $2\omega_3$ imaginaire pure, *les deux équations* (2) *et* (3) *fournissent en termes explicites la solution l'une de l'autre.*

Nous prouverons en premier lieu que chacune des équations ci-dessus ne peut admettre, par rapport à la fonction qui y entre sous le signe intégral, qu'une seule solution au plus. A cet effet j'utiliserai quelques résultats de mon Mémoire déjà cité des *Acta*.

Envisageons la fonction analytique suivante :

$$(4)\quad \Omega(Z) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)-\zeta(Z-it)-\zeta(Z+it)]\,dt,$$

Si l'on se reporte à la page 156 [formule (117)] de mon Mémoire, on voit que cette fonction, régulière dans tout le rectangle construit sur les demi-périodes avec un sommet à l'origine, jouit dans ce rectangle des propriétés que voici : Sa partie réelle est une fonction harmonique nulle sur les côtés horizontaux du rectangle, c'est-à-dire pour $Z = X$ ou $Z = \omega_3 + X$, avec $0 < X < \omega_1$. Et lorsque Z tend vers un point d'un des côtés verticaux, d'ordonnée Y, la partie imaginaire de cette fonction tend vers la valeur $G(Y)$. Ceci posé, admettons que la fonction $G(t)$ prenne des valeurs symétriques pour des valeurs de t équidistantes de $\frac{\omega_3}{2i}$; on pourra alors écrire

$$\Omega(Z) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)-\zeta(Z-it)-\zeta(Z+it)]\,dt$$
$$+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)[\zeta_1(Z-\omega_3+it)+\zeta_1(Z+\omega_3-it)$$
$$-\zeta(Z-\omega_3+it)-\zeta(Z+\omega_3-it)\,dt,$$

(¹) *Comptes rendus*, 14 et 28 juin 1909; *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXIX, 1910.

(²) Notamment LAURICELLA, *Atti della R. Accad. dei Lincei*. — E. PICONE. *Lincei*, 1910. Palermo, 1910.

c'est-à-dire par une transformation facile

$$\Omega(Z) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)\big[\ \ \zeta\,(Z-it)+\zeta\,(Z+it)$$
$$-\zeta_1(Z-it)-\zeta_1(Z+it)$$
$$+\zeta_2(Z-it)+\zeta_2(Z+it)$$
$$-\zeta_3(Z-it)-\zeta_3(Z+it)\big]\,dt.$$

Revenons alors à la formule (2). Si celle-ci admettait plus d'une solution $g(y)$, la différence $G(y)$ de deux d'entre elles devrait vérifier l'équation.

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)\big[\ \ \zeta\,(iy-it)+\zeta\,(iy+it)-\zeta_1(iy-it)-\zeta_1(iy+it)$$
$$+\zeta_2(iy-it)+\zeta_2(iy+it)-\zeta_3(iy-it)-\zeta_3(iy+it)\big]\,dt = 0.$$

Or le premier membre de cette dernière relation est la valeur que prend la partie réelle de $\Omega(Z)$ lorsque le point Z s'approche du point iy de l'axe imaginaire en restant dans le rectangle. On peut du reste aussi constater sans peine que c'est également (mais cette fois au signe près) la valeur de la partie réelle quand Z s'approche du point $\omega_1 + iy$. Donc l'existence d'une fonction $G(t)$ non identiquement nulle, satisfaisant à l'équation ci-dessus, entraînerait que la partie réelle de $\Omega(Z)$ fût nulle sur les quatre côtés du rectangle. Cette partie réelle, singulière dans tout le rectangle, y sera donc identiquement nulle, et par suite la fonction $\Omega(Z)$ se réduira à une constante imaginaire pure. Cette constante est du reste zéro. En effet, faisons dans (4), $Z = \frac{\omega_3}{2} + X$, on trouvera

$$\Omega\left(\frac{\omega_3}{2}+X\right) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)\Big[\ \ \zeta\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)$$
$$+\zeta\left(X+it+\frac{\omega_3}{2}\right)-\zeta_1\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)+\ldots\Big]\,dt.$$

Or on a

$$\zeta\left(X+it+\frac{\omega_3}{2}\right) = \zeta\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}+\omega_3\right) = \zeta_3\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}\right)+\eta_3$$

et des formules analogues; de là on tire

$$\Omega\left(X-\frac{\omega_3}{2}\right)=\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} G(t)\left[\begin{array}{l} \zeta\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)-\zeta\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}\right)\\ -\zeta_1\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)+\zeta_1\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}\right)\\ +\zeta_2\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)-\zeta_2\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}\right)\\ -\zeta_3\left(X-it+\frac{\omega_3}{2}\right)+\zeta_3\left(X+it-\frac{\omega_3}{2}\right)\end{array}\right]dt,$$

ce qui est visiblement réel pour X réel. La constante en question est donc bien nulle. Mais alors la valeur $G(y)$ que prend la partie imaginaire de $\Omega(Z)$ sur les bords verticaux du rectangle ne peut être que zéro, et par suite $G(y)$ est identiquement nulle, ce que nous voulions démontrer.

Par un procédé analogue, on prouverait que l'équation (3) ne peut pas avoir non plus deux solutions distinctes.

Nous allons maintenant prouver que la formule (3) donne la solution de l'équation (2). A cet effet, transportons dans le second membre de (2) la valeur de $g(y)$ donnée par la formule (3), après avoir isolé dans les intervalles $x-\varepsilon$, $x+\varepsilon$ pour la première formule, $y-\varepsilon_1$, $y+\varepsilon_1$ pour la seconde, de manière à éviter les points singuliers. Nous obtenons ainsi un résultat de la forme

$$(5)\quad f(x)=\frac{1}{\pi^2}\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int_0^{y-\varepsilon_1}+\int_{y+\varepsilon_1}^{\frac{\omega_3}{2i}} f(z)\left[\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\frac{\omega_3}{2i}} U(iy)\,dy\right]dz,$$

en posant

$$(6)\quad \begin{aligned} U(t)= &\;[-\zeta(ix-t)-\zeta(ix+t)+\zeta_1(ix-t)+\zeta_1(ix+t)\\ &\;-\zeta_2(ix-t)-\zeta_2(ix+t)+\zeta_3(ix-t)+\zeta_3(ix+t)]\\ &\times[-\zeta(t-iz)+\zeta(t+iz)-\zeta_1(t-iz)+\zeta_1(t+iz)\\ &\;+\zeta_2(t-iz)-\zeta_2(t+iz)+\zeta_3(t-iz)-\zeta_3(t+iz)]\end{aligned}$$

après un changement dans l'ordre des intégrations, changement évidemment permis.

C'est cette formule (5) que nous sommes ainsi ramenés à démontrer. Or la fonction $U(t)$ est une fonction doublement périodique, puisque l'addition d'une période à l'argument t remplace $\zeta_\alpha(t-u)$ par $\zeta_\alpha(t+u)+2\eta_1$ et $\zeta_\alpha(ix-t)$ par $\zeta_\alpha(ix-t)-2\eta_1$ s'il s'agit par exemple de la période $2\omega_1$; on voit donc bien que $U(t)$ reste invariable. Les seuls points singu-

liers de cette fonction sont des pôles, qui seront évidemment tous simples *tant que* z *est différent de* x. Faisons donc jusqu'à nouvel ordre cette hypothèse; dans le rectangle fondamental construit sur $2\omega_1$ et $2\omega_3$ comme côtés, ou plutôt dans le rectangle déduit de celui-ci par une très légère translation vers le bas et vers la gauche, qui amène l'origine à l'intérieur du rectange, les affixes des pôles, au nombre de seize, sont les suivants :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll}
t_1 = ix, & t_9 = iz, \\
t_2 = 2\omega_3 - ix, & t_{10} = 2\omega_3 - iz, \\
t_3 = \omega_1 + ix, & t_{11} = \omega_1 + iz, \\
t_4 = \omega_1 + 2\omega_3 - ix, & t_{12} = \omega_1 + 2\omega_3 - iz, \\
t_5 = -\omega_2 + ix, & t_{13} = -\omega_2 + iz, \\
t_6 = -\omega_2 - ix, & t_{14} = -\omega_2 - iz. \\
t_7 = \omega_3 + ix, & t_{15} = \omega_3 + iz, \\
t_8 = \omega_3 - ix, & t_{16} = \omega_3 - iz.
\end{array}\right.$$

La multiplication de $U(t)$ par $t - t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ donne, pour la première parenthèse, la valeur limite $+1$ et -1 alternativement, quand on fait tendre t vers t_i. D'autre part l'addition d'une période ou d'une demi-période aux diverses fonctions ζ_α apporte les modifications indiquées par les formules suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}
\zeta\,(u + 2\omega_\alpha) = \zeta\,u + 2\eta_\alpha, \\
\zeta\,(u \pm \omega_\alpha) = \zeta_\alpha u \pm \eta_\alpha, \\
\zeta_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = \zeta_\alpha u + 2\eta_\alpha, \\
\zeta_\alpha(u \pm \omega_\alpha) = \zeta\,u \pm \eta_\alpha, \\
\zeta_\alpha(u + 2\omega_\beta) = \zeta_\alpha u + 2\eta_\beta, \\
\zeta_\alpha(u \pm \omega_\beta) = \zeta_\gamma u \pm \eta_\beta \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma).
\end{array}\right.$$

On conclut de là que les huit premiers résidus de la fonction $U(t)$ sont respectivement

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\rho_1 = -\zeta\,(ix - iz) + \zeta\,(ix + iz) - \zeta_1(ix - iz) + \zeta_1(ix + iz) \\
\qquad + \zeta_2(ix - iz) - \zeta_2(ix + iz) + \zeta_3(ix - iz) - \zeta_3(ix + iz), \\
\rho_2 = -\zeta\,(ix + iz) + \zeta\,(ix - iz) + \ldots = -\rho_1, \\
\rho_3 = \quad \zeta_1(ix - iz) - \zeta_1(ix + iz) + \ldots = -\rho_1, \\
\rho_4 = \quad \zeta_1(ix + iz) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \rho_1, \\
\rho_5 = -\zeta_2(ix - iz) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\rho_1, \\
\rho_6 = -\zeta_2(ix + iz) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \rho_1, \\
\rho_7 = \quad \zeta_3(ix - iz) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \rho_1, \\
\rho_8 = \quad \zeta_3(ix + iz) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\rho_1,
\end{array}\right.$$

et un calcul analogue donne pour les huit derniers résidus

$$(10)\quad \begin{cases} \rho_9 = \zeta(ix - iz) + \zeta(ix + iz) - \zeta_1(ix - iz) - \zeta_1(ix + iz) \\ \qquad + \zeta_2(ix - iz) + \zeta_2(ix + iz) - \zeta_3(ix - iz) - \zeta_3(ix + iz), \\ \rho_{10} = -\rho_9, \\ \rho_{11} = -\rho_9, \\ \rho_{12} = \rho_9, \\ \rho_{13} = -\rho_9, \\ \rho_{14} = \rho_9, \\ \rho_{15} = \rho_9, \\ \rho_{16} = -\rho_9. \end{cases}$$

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annuaire pour l'an 1919 *publié par le Bureau des Longitudes*. Avec des Notices scientifiques. 1 vol. in-16, VIII-524 pages + A.1 — A.60 + B.1 — B.27 + C.1 — C.69. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1919.

Notices. — *Figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton;* par P. Appell. — *La détermination interférentielle des diamètres des astres;* par Maurice Hamy.

Bortolotti (Ettore). — *Italiani Scopritori e Promotori di Teorie algebriche*. 1 vol. in-8, 102 pages. Modena. O. Ferraguti e C., 1919.

MÉLANGES.

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE FREDHOLM;

PAR M. HENRI VILLAT.

(*Suite et fin.*)

Par conséquent nous pourrons écrire, en désignant par D une constante (par rapport à t),

$$U(t) = D + \rho_1 \left\{ \begin{array}{l} \zeta(t-ix) - \zeta(t-2\omega_3+ix) \\ -\zeta(t-\omega_1-ix) + \zeta(t-\omega_1-2\omega_3+ix) \\ -\zeta(t+\omega_2-ix) + \zeta(t+\omega_2+ix) \\ +\zeta(t-\omega_3-ix) - \zeta(t-\omega_3+ix) \end{array} \right\} + \rho_9 \left\{ \begin{array}{l} \zeta(t-iz) - \zeta(t-2\omega_3+iz) \\ -\zeta(t-\omega_1-iz) + \zeta(t-\omega_1-2\omega_3+iz) \\ -\zeta(t+\omega_2-iz) + \zeta(t+\omega_2+iz) \\ +\zeta(t-\omega_3-iz) - \zeta(t-\omega_3+iz) \end{array} \right\}$$

ou mieux

$$(11) \quad U(t) = D + \rho_1 \left\{ \begin{array}{l} \zeta(t-ix) - \zeta(t+ix) - \zeta_1(t-ix) + \zeta_1(t+ix) \\ -\zeta_2(t-ix) + \zeta_2(t+ix) + \zeta_3(t-ix) - \zeta_3(t+ix) \end{array} \right\} + \rho_9 \left\{ \begin{array}{l} \zeta(t-iz) - \zeta(t+iz) - \zeta_1(t-iz) + \zeta_1(t+iz) \\ -\zeta_2(t-iz) + \zeta_2(t+iz) + \zeta_3(t-iz) - \zeta_3(t+iz) \end{array} \right\}.$$

Pour déterminer la valeur de la constante D, nous ferons dans cette égalité $t = 0$. Il vient ainsi

$$(12) \quad \begin{aligned} D = \; & (-2\zeta ix + 2\zeta_1 ix - 2\zeta_2 ix + 2\zeta_3 ix) \\ & \times(\;\; 2\zeta iz + 2\zeta_1 iz - 2\zeta_2 iz - 2\zeta_3 iz) \\ & + \rho_1(2\zeta ix - 2\zeta_1 ix - 2\zeta_2 ix + 2\zeta_3 ix) \\ & + \rho_9(2\zeta iz - 2\zeta_1 iz - 2\zeta_2 iz + 2\zeta_3 iz). \end{aligned}$$

Or il est bien facile de voir que l'expression placée au second membre est une fonction elliptique, de ix par exemple, avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$. Ensuite les pôles de cette expression sont en évidence. Le pôle $ix = 0$ est simple, son résidu y est nul, de sorte que ce point n'est un pôle qu'en apparence seulement : pour $ix = iz$, on trouve comme résidu

$$-(2\zeta ix - 2\zeta_1 ix - 2\zeta_2 ix + 2\zeta_3 ix) + (2\zeta iz - 2\zeta_1 iz - 2\zeta_2 iz + 2\zeta_3 iz)\rho_9,$$

c'est-à-dire encore zéro. Même résultat pour $ix = -iz$, etc. Tous les résidus sont donc nuls; D, considéré comme fonction de ix, est une fonction régulière sans pôles, donc c'est une constante par rapport à x, et aussi par rapport à z, à cause de la symétrie: du reste les mêmes considérations se répètent sans difficulté relativement à la variable z.

Ainsi D se réduit à une constante qui ne dépend ni de x ni de z. Pour avoir la valeur de cette constante, nous pourrons donner à x et à z des valeurs particulières, nous choisirons les suivantes :

$$ix = -\frac{\omega_2}{2}, \qquad iz = \frac{\omega_3}{2};$$

dans ces conditions, il faudra remplacer $ix - iz$ par $\frac{\omega_1}{2}$, et $ix + iz$ par $\frac{\omega_1}{2} + \omega_3$; alors l'expression de D deviendra

$$\begin{aligned}
D = & \left(+2\zeta\frac{\omega_2}{2} - 2\zeta_1\frac{\omega_2}{2} + 2\zeta_2\frac{\omega_2}{2} - 2\zeta_3\frac{\omega_2}{2}\right)\\
& \times \left(2\zeta\frac{\omega_3}{2} + 2\zeta_1\frac{\omega_3}{2} - 2\zeta_2\frac{\omega_3}{2} - 2\zeta_3\frac{\omega_3}{2}\right)\\
& - \Big[-\zeta\,\frac{\omega_1}{2} + \zeta\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) - \zeta_1\frac{\omega_1}{2} + \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right)\\
& \qquad + \zeta_2\frac{\omega_1}{2} - \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) + \zeta_3\frac{\omega_1}{2} - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right)\Big]\\
& \times \left(2\zeta\frac{\omega_2}{2} - 2\zeta_1\frac{\omega_2}{2} - 2\zeta_2\frac{\omega_2}{2} + 2\zeta_3\frac{\omega_2}{2}\right)\\
& - \Big[\zeta\,\frac{\omega_1}{2} + \zeta\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) - \zeta_1\frac{\omega_1}{2} - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right)\\
& \qquad + \zeta_2\frac{\omega_1}{2} + \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right) - \zeta_3\frac{\omega_1}{2} - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3\right)\Big]\\
& \times \left(-2\zeta\frac{\omega_3}{2} + 2\zeta_1\frac{\omega_3}{2} + 2\zeta_2\frac{\omega_3}{2} - 2\zeta_3\frac{\omega_3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Or on démontre facilement les formules suivantes :

$$(13) \quad \left\{\begin{aligned}
&\zeta_1\frac{\omega_1}{2} + \zeta\,\frac{\omega_1}{2} = \eta_1, \qquad \zeta_2\frac{\omega_2}{2} + \zeta\,\frac{\omega_2}{2} = \eta_2, \qquad \zeta_3\frac{\omega_3}{2} + \zeta\,\frac{\omega_3}{2} = \eta_3,\\
&\zeta_2\frac{\omega_1}{2} + \zeta_3\frac{\omega_1}{2} = \eta_1, \qquad \zeta_1\frac{\omega_2}{2} + \zeta_3\frac{\omega_2}{2} = \eta_2, \qquad \zeta_1\frac{\omega_3}{2} + \zeta_2\frac{\omega_3}{2} = \eta_3
\end{aligned}\right.$$

qui découlent des formules (8). Donc le premier et le dernier des trois produits qui figurent dans D disparaissent; quant au

deuxième, le crochet qui y figure se transforme en

$$-\zeta\frac{\omega_1}{2}+\zeta_3\frac{\omega_1}{2}-\zeta_1\frac{\omega_1}{2}+\zeta_2\frac{\omega_1}{2}+\zeta_2\frac{\omega_1}{2}-\zeta_1\frac{\omega_1}{2}+\zeta_3\frac{\omega_1}{2}-\zeta\frac{\omega_1}{2}$$
$$=-2\left(\zeta\frac{\omega_1}{2}+\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\zeta_2\frac{\omega_1}{2}-\zeta_3\frac{\omega_1}{2}\right),$$

ce qui est encore nul en vertu des mêmes formules (13).

On en conclut par suite *que* D *est nul*. Ce résultat pouvait encore s'apercevoir facilement en donnant à ix et à iz des valeurs très petites, mais différentes entre elles pour éviter toute complication; en faisant par exemple $ix = u$, et $iz = 2u$, on aura l'évaluation de D après avoir remarqué que le développement de $\zeta_\alpha u$ commence par le terme $-e_\alpha u$, suivi de termes du troisième degré au moins en u; par conséquent, en négligeant les termes en u^3 dans les parenthèses, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} = \quad & \left(-\frac{2}{u}-2e_1u+2e_2u-2e_3u+\ldots\right)\\
\times\ & \left(\frac{1}{u}-4e_1u+4e_2u+4e_3u+\ldots\right)\\
-\ & \left(\frac{1}{u}+\frac{1}{3u}-e_1u-3e_1u+e_2u+3e_2u-e_3u+3e_3u+\ldots\right)\\
\times\ & \left(-\frac{2}{u}-2e_1u-2e_2u+2e_3u+\ldots\right)\\
-\ & \left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{3u}-e_1u+3e_1u+e_2u-3e_2u-e_3u+3e_3u+\ldots\right)\\
\times\ & \left(-\frac{1}{u}-4e_1u-4e_2u+4e_3u+\ldots\right).
\end{aligned}$$

Les termes en $\frac{1}{u^2}$ disparaissent d'eux-mêmes ainsi que les termes en $\frac{1}{u}$; quant au terme constant, il est égal à

$$\begin{gathered}
-2(e_1-e_2+e_3)+8(e_1-e_2-e_3)+8(-e_1+e_2+e_3)\\
-\frac{4}{3}(-2e_1-2e_2+2e_3)+2(e_1-e_2+e_3)+\frac{2}{3}(-4e_1-4e_2-4e_3),
\end{gathered}$$

c'est-à-dire visiblement à zéro. D est donc bien nul, comme nous voulions le prouver.

Transportons maintenant dans (5) la valeur de $\mathrm{U}(t)$ fournie par (11) où nous faisons $\mathrm{D}=0$. Nous avons tout d'abord à envi-

sager l'expression

$$(14)\qquad \begin{aligned} V(x, z, \varepsilon) &= \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\frac{\omega_3}{2i}} U(iy)\,dy \\ &= -i\left[\int_0^{i(x-\varepsilon)} \int_{i(x+\varepsilon)}^{\frac{\omega_3}{2}} U(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Or l'intégrale indéfinie de $-iU(t)$ est

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &-i\rho_1 \log\left|\frac{\sigma(t-ix)\,\sigma_1(t+ix)\,\sigma_2(t+ix)\,\sigma_3(t-ix)}{\sigma(t+ix)\,\sigma_1(t-ix)\,\sigma_2(t-ix)\,\sigma_3(t+ix)}\right|, \\ &-i\rho_2 \log\left|\frac{\sigma(t-iz)\,\sigma_1(t+iz)\,\sigma_2(t+iz)\,\sigma_3(t-iz)}{\sigma(t+iz)\,\sigma_1(t-iz)\,\sigma_2(t-iz)\,\sigma_3(t+iz)}\right|. \end{aligned}\right.$$

Pour $t = 0$, sous le premier signe logarithme on trouve immédiatement $+1$; pour $t = \frac{\omega_3}{2}$, on a

$$\frac{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - ix\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} + ix\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} + ix\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} - ix\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} + ix\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} - ix\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} - ix\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} + ix\right)}.$$

Mais [1] on peut écrire ceci, en ramenant tout au même argument $\frac{\omega_3}{2} + ix$,

$$\frac{\left\{\begin{aligned} &\left[e^{-\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\eta_3}\sigma\omega_3\,\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\right]\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right) \\ &\quad\times\left[-e^{-\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\eta_3}\frac{\sigma_1\omega_3\,\sigma_2\omega_3}{\sigma\omega_3}\,\sigma\left(-\frac{\omega_3}{2}-ix\right)\right]\end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned} &\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\left[e^{-\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\eta_3}\sigma_1\omega_3\,\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\right] \\ &\quad\times\left[e^{-\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\eta_3}\sigma_2\omega_3\,\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\right]\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2}+ix\right)\end{aligned}\right\}},$$

ce qui se réduit à l'unité. On en conclut par conséquent

$$\begin{aligned} V(x,z,\varepsilon) = &-i\rho_1\left[\begin{aligned} &\log\left|\frac{\sigma(-i\varepsilon)\,\sigma_1(2ix-i\varepsilon)\,\sigma_2(2ix-i\varepsilon)\,\sigma_3(-i\varepsilon)}{\sigma(2ix-i\varepsilon)\,\sigma_1(-i\varepsilon)\,\sigma_2(-i\varepsilon)\,\sigma_3(2ix-i\varepsilon)}\right| \\ -&\log\left|\frac{\sigma(i\varepsilon)\,\sigma_1(2ix+i\varepsilon)\,\sigma_2(2ix+i\varepsilon)\,\sigma_3(i\varepsilon)}{\sigma(2ix+i\varepsilon)\,\sigma_1(i\varepsilon)\,\sigma_2(i\varepsilon)\,\sigma_3(2ix+i\varepsilon)}\right|\end{aligned}\right] \\ &-i\rho_2\left[\begin{aligned} &\log\left|\frac{\sigma(ix-iz-i\varepsilon)\sigma_1(ix+iz-i\varepsilon)\sigma_2(ix+iz-i\varepsilon)\sigma_3(ix-iz-i\varepsilon)}{\sigma(ix+iz-i\varepsilon)\sigma_1(ix-iz-i\varepsilon)\sigma_2(ix-iz-i\varepsilon)\sigma_3(ix+iz-i\varepsilon)}\right| \\ -&\log\left|\frac{\sigma(ix-iz+i\varepsilon)\sigma_1(ix+iz+i\varepsilon)\sigma_2(ix+iz+i\varepsilon)\sigma_3(ix-iz+i\varepsilon)}{\sigma(ix+iz+i\varepsilon)\sigma_1(ix-iz+i\varepsilon)\sigma_2(ix-iz+i\varepsilon)\sigma_3(ix+iz+i\varepsilon)}\right|\end{aligned}\right], \end{aligned}$$

---

[1] *Cf.* TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, XII, 3.

ce que nous écrirons sous la forme

$$(16)\qquad V(x, z, \varepsilon) = -i\rho_1 \log |A(x, \varepsilon)| - i\rho_9 \log |B(x, z, \varepsilon)|$$

en posant

$$(17)\quad A(x, \varepsilon) = \frac{\sigma(2ix + i\varepsilon)\,\sigma_1(2ix - i\varepsilon)\,\sigma_2(2ix - i\varepsilon)\,\sigma_3(2ix + i\varepsilon)}{\sigma(2ix - i\varepsilon)\,\sigma_1(2ix + i\varepsilon)\,\sigma_2(2ix + i\varepsilon)\,\sigma_3(2ix - i\varepsilon)};$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} B(x, z, \varepsilon) = {} & \left(\frac{\sigma\,(ix - iz - i\varepsilon)\,\sigma\,(ix + iz + i\varepsilon)}{\sigma\,(ix + iz - i\varepsilon)\,\sigma\,(ix - iz + i\varepsilon)}\right) \\ & \times \left(\frac{\sigma_1(ix + iz - i\varepsilon)\,\sigma_1(ix - iz + i\varepsilon)}{\sigma_1(ix - iz - i\varepsilon)\,\sigma_1(ix + iz + i\varepsilon)}\right) \\ & \times \left(\frac{\sigma_2(ix + iz - i\varepsilon)\,\sigma_2(ix - iz + i\varepsilon)}{\sigma_2(ix - iz - i\varepsilon)\,\sigma_2(ix + iz + i\varepsilon)}\right) \\ & \times \left(\frac{\sigma_3(ix - iz - i\varepsilon)\,\sigma_3(ix + iz + i\varepsilon)}{\sigma_3(ix + iz - i\varepsilon)\,\sigma_3(ix - iz + i\varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

Nous avons maintenant à envisager l'expression

$$(19)\qquad \frac{1}{\pi^2}\int_0^{y-\eta} + \int_{y+\eta}^{\frac{\omega_3}{2i}} V(x, z, \varepsilon)\, f(z)\, dz.$$

Le petit intervalle, exclu primitivement autour de la valeur particulière y de z, peut dorénavant être sans inconvénient pris en considération, car il n'introduit plus visiblement aucune difficulté. Mais il en est autrement, comme nous venons de le voir, des valeurs de z voisines de x. Nous exclurons donc momentanément l'intervalle $x - \varepsilon_2$, $x + \varepsilon_2$ de valeurs de z. De sorte que la quantité à étudier devient

$$(20)\quad \frac{1}{\pi^2}\int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} f(z)[-i\rho_1 \log |A(x, \varepsilon)| - i\rho_9 \log |B(x, z, \varepsilon)|]\, dz.$$

Il nous faudrait en trouver la valeur limite lorsque ε et ε_2 tendent vers zéro. C'est là un problème fort délicat, pour cette raison que l'on aperçoit assez aisément que les éléments de l'intégrale considérée, qui sont à une distance finie du point $z = x$, apportent à l'intégrale une contribution qui tend vers zéro avec ε; c'est par conséquent le seul élément voisin de $z = x$ qui donnera la valeur limite de l'intégrale à étudier. Or c'est justement pour cette valeur de la variable que les calculs antérieurs cessent d'être entièrement valables, pour les raisons qu'on a expliquées. On peut arriver à tourner la difficulté, par l'emploi d'un artifice utilisé

récemment par M. E. Picard [1] à propos des équations intégrales de troisième espèce, équations qui, malgré des différences essentielles, ne sont pas sans présenter quelques analogies avec celles qui font l'objet du présent travail. Cet artifice consiste à prolonger analytiquement les fonctions à étudier dans le domaine complexe, de façon à éviter par un petit contour curviligne le point $z = x$ d'où provient la difficulté. J'emploierai dans cet exposé un autre artifice plus indirect, mais qui conduit assez rapidement au but.

On peut tout d'abord extraire de l'expression (20) la portion

$$-\frac{i}{\pi^2}\int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \rho_1 f(z) \log|A(x, \varepsilon)|\, dz$$

qu'on peut évidemment écrire

$$-\frac{i}{\pi^2}\log|A(x, \varepsilon)|\left[\int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \rho_1 f(z)\, dz\right].$$

Or d'après (17) il est manifeste que, pour ε assez petit, $A(x, \varepsilon)$ sera aussi voisin de *un* que l'on voudra, et le logarithme de son module sera aussi petit que l'on voudra. Par suite, la contribution fournie à la valeur limite de l'intégrale sera nulle.

Dans la partie restante de l'expression (20) nous commencerons par faire une transformation, dont le motif apparaîtra un peu plus loin. Les formules d'homogénéité relatives aux fonctions elliptiques donnent

$$\zeta(iu \mid \omega_1 \omega_3) = -i\zeta\left(u \mid -i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right),$$

$$\sigma(iu \mid \omega_1 \omega_3) = \quad i\sigma\left(u \mid -i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right),$$

et, par conséquent,

$$\eta_3 = -i\zeta\left(\frac{\omega_3}{i}\middle| -i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right).$$

Utilisons alors une formule connue [2] pour les fonctions σ considérées comme construites avec les nouvelles périodes $2i\omega_1, \frac{2\omega_3}{i}$; cela donne, avec les changements de notations nécessaires, et en conservant bien entendu la notation η_1, η_3 pour les fonctions

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 459.

[2] TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, CVI, 1.

elliptiques aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ l'égalité

$$(21)\quad \begin{aligned} \log\sigma(iz - ix + i\varepsilon \mid \omega_1\omega_3) &= \frac{i\pi}{2} + \log\frac{2\omega_3}{i\pi} - \frac{\eta_3}{2\omega_3}(z - x + \varepsilon)^2 + \log\sin\frac{i\pi(z - x + \varepsilon)}{2\omega_3} \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty}\frac{q'^{2r}}{r(1 - q'^{2r})}\left(2\sin\frac{ri\pi(z - x + \varepsilon)}{2\omega_3}\right)^2 \end{aligned}$$

dans laquelle le logarithme possède sa détermination dite *principale*, et où q' est mis pour $e^{-\pi\frac{i\omega_1}{\omega_3}}$.

On aura de même

$$(22)\quad \begin{aligned} \log\sigma(ix - iz + i\varepsilon \mid \omega_1\omega_3) &= \frac{i\pi}{2} + \log\frac{2\omega_3}{i\pi} - \frac{\eta_3}{2\omega_3}(x - z + \varepsilon)^2 + \log\sin\frac{i\pi(x - z + \varepsilon)}{2\omega_3} \\ &+ \sum_{1}^{\infty}\frac{q'^{2r}}{r(1 - q'^{2r})}\left(2\sin\frac{ri\pi(x - z + \varepsilon)}{2\omega_3}\right)^2. \end{aligned}$$

D'où, par différence,

$$(23)\quad \begin{aligned} \log\left|\frac{\sigma(ix - iz - i\varepsilon)}{\sigma(ix - iz + i\varepsilon)}\right| &= \log\left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z - x + \varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(x - z + \varepsilon)}{2\omega_3}}\right| - \frac{2\eta_3}{\omega_3}\varepsilon(z - x) \\ &- \sum_{1}^{\infty}\frac{4q'^{2r}}{r(1 - q'^{2r})}\sin\frac{ri\pi(z - x)}{\omega_3}\sin\frac{ri\pi\varepsilon}{\omega_3}, \end{aligned}$$

les termes imaginaires disparaissant du reste nécessairement dans le second membre.

On a maintenant, d'après (10),

$$\rho_9 = \zeta(ix - iz) + \mathrm{R}$$

en désignant par R une quantité qui reste finie; puis, d'après la formule (CVI, 2) (¹), on a encore

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho_9 &= \mathrm{R} + i\zeta\left(z - x \mid -i\omega_1, \frac{\omega_3}{i}\right), \\ &= \mathrm{R} + i\left[-\frac{\eta_3}{\omega_3}(z - x) + \frac{i\pi}{2\omega_3}\cot\frac{i\pi(z - x)}{2\omega_3}\right. \\ &\qquad\left. + \frac{2i\pi}{\omega_3}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q'^{2r}}{1 - q'^{2r}}\sin\frac{ri\pi(z - x)}{\omega_3}\right]. \end{aligned}\right.$$

(¹) TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, IV, 101.

Observons maintenant que, dans la fonction $B(x, z, \varepsilon)$ définie par la formule (18), les seuls facteurs qui puissent s'annuler dans l'intervalle d'intégration sont justement ceux dont nous avons calculé il y a un instant les logarithmes par les formules (21) et (22). Tous les autres facteurs, autres que ces deux-là ainsi mis en évidence, forment une quantité $B_1(x, z, \varepsilon)$ qui reste finie et non nulle.

De tout ceci il résulte que, si dans la partie de l'expression (20) qui nous reste à étudier, nous remplaçons $\log B(x, z, \varepsilon)$ par

$$\log B_1(x, z, \varepsilon) + \log \left| \frac{\sigma(ix - iz - i\varepsilon)}{\sigma(ix - iz + i\varepsilon)} \right|,$$

et si nous utilisons les développements (23) et (24) démontrés plus haut, l'expression (20) en question se décomposera en un certain nombre de termes rentrant dans les types ci-dessous :

1° Un terme

$$(25)\quad \alpha = -\frac{i}{\pi^2}\int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \left(\frac{-\pi}{2\omega_3}\right) f(z) \cot\frac{i\pi(z-x)}{2\omega_3} \log \left| \frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(x-z+\varepsilon)}{2\omega_3}} \right| dz;$$

2° Des termes de la forme

$$(26)\quad \beta = -\frac{i}{\pi^2}\int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} P f(z) \log \left| \frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(x-z+\varepsilon)}{2\omega_3}} \right| dz,$$

P désignant une quantité finie;

3° Des termes de la forme

$$(27)\quad \gamma = \int_0^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} f(z)\, Q(x, z, \varepsilon) \cot\frac{i\pi(z-x)}{2\omega_3}\, dz,$$

où $Q(x, z, \varepsilon)$ représente une quantité infiniment petite avec ε, et sur les propriétés de laquelle nous reviendrons bientôt;

4° Des termes où il n'interviendra sous le signe intégral, ni

$$\log \left| \frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}} \right|,$$

ni

$$\cot\frac{i\pi(z-x)}{2\omega_3},$$

et qui sont visiblement infiniment petits avec ε.

Il n'y a donc à s'occuper que des trois premiers types pour en chercher les valeurs limites. Pour les termes du type β. il est aisé de voir que leur limite est nulle; en effet, appliquons ici l'inégalité connue

$$\left(\int_a^b uv\,dz\right)^2 < \left(\int_a^b u^2\,dz\right)\left(\int_a^b v^2\,dz\right),$$

nous trouverons sans peine

$$\left[\int_0^{x-\varepsilon_2} \mathrm{P} f(z) \log \left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}}\right| dz\right]^2$$
$$< \left(\int_0^{x-\varepsilon_2} \mathrm{P}^2 f^2(z)\,dz\right)\left(\int_0^{x-\varepsilon_2} \log^2 \left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}}\right| dz\right)$$

et de même

$$\left[\int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \mathrm{P} f(z) \log \left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}}\right| dz\right]^2$$
$$< \left(\int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \mathrm{P}^2 f^2(z)\,dz\right)\left(\int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \log^2 \left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}}\right| dz\right).$$

Or considérons l'intégrale

$$\int_0^{x-\varepsilon_2} \log^2 \left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-x+\varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin\dfrac{i\pi(z-x-\varepsilon)}{2\omega_3}}\right| dz.$$

Si ε_2 y était supposé fixe, on pourrait choisir ε assez petit pour que la quantité sous le signe logarithme soit aussi voisine de *un* que l'on veut, cela quel que soit z dans l'intervalle d'intégration; donc la valeur limite correspondant à l'intervalle $0, x-\varepsilon_2$, où ε_2 est un petit nombre fixé, est nulle. D'autre part, la contribution apportée à cette intégrale par les éléments immédiatement voisins de $z = x$, sera infiniment petite; en effet, dans ces conditions, on peut sans inconvénient remplacer le rapport des sinus par le rap-

port des arcs, l'erreur ainsi commise étant négligeable; considérons alors l'expression

$$J = \int_{x-\varepsilon_2}^{x} \log^2 \left| \frac{z - x + \varepsilon}{z - x - \varepsilon} \right| dz.$$

Comme on a, pour u petit,

$$\log^2 |u| < \left| \frac{\log u}{u} \right|,$$

on voit de suite qu'on pourra écrire l'inégalité

$$J < \frac{1}{2} \log^2 \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{\varepsilon + \varepsilon_2} \right|$$

de sorte qu'au voisinage de $z = x$, il suffira de supposer que ε tend vers zéro plus vite que ε_2, pour être assuré que la contribution envisagée à l'intégrale (20) est bien aussi petite que l'on veut.

Comme on peut répéter un raisonnement analogue pour l'intégrale

$$\int_{x+\varepsilon_2}^{\frac{\omega_3}{2i}} \log^2 \left| \frac{\sin \dfrac{i\pi(z - x + \varepsilon)}{2\omega_3}}{\sin \dfrac{i\pi(z - x - \varepsilon)}{2\omega_3}} \right| dz,$$

il en résulte que les termes de la forme β ne fourniront rien à la valeur limite de l'expression (20).

Considérons maintenant les termes γ, et observons que, d'après la formation de ces termes, la quantité $Q(x, z, \varepsilon)$ qui y figure se décompose en une somme de quantités telles que les suivantes :

$$\log \frac{\sigma_1(ix - iz + i\varepsilon)}{\sigma_1(ix - iz - i\varepsilon)} \qquad \text{ou} \qquad \log \frac{\sigma_1(ix + iz - i\varepsilon)}{\sigma_1(ix + iz + i\varepsilon)}$$

(à un coefficient numérique près). Or on a les inégalités

$$\begin{aligned} &\log \sigma_1(ix - iz + i\varepsilon) \\ &\quad = \frac{-\eta_1(x - z + \varepsilon)^2}{2\omega_1} + \log \cos \frac{i\pi(x - z + \varepsilon)}{2\omega_1} \\ &\qquad + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{q^{2r}}{r(1 - q^{2r})} \left(2 \sin \frac{ri\pi(x - z + \varepsilon)}{2\omega_1} \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\log\sigma_1(ix - iz - i\varepsilon) = \frac{-\eta_1(x-z-\varepsilon)^2}{2\omega_1} + \log\cos\frac{i\pi(x-z-\varepsilon)}{2\omega_1} + \sum_1^\infty(-1)^r\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{ri\pi(x-z-\varepsilon)}{2\omega_1}\right)^2$$

$\left(\text{en posant } q = e^{-\frac{\pi\omega_1}{i\omega_1}}\right)$; d'où. par des transformations faciles.

$$\log\frac{\sigma_1(ix-iz-i\varepsilon)}{\sigma_1(ix-iz-i\varepsilon)} = -\frac{\eta_1}{\omega_1}\varepsilon(x-z) + \frac{\pi\varepsilon}{2\omega_1}\operatorname{th}\frac{\pi(x-z+\lambda\varepsilon)}{2\omega_1} - 4\sum_1^\infty(-1)^r\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\operatorname{sh}\frac{r\pi(x-z)}{\omega_1}\operatorname{sh}\frac{r\pi\varepsilon}{\omega_1},$$

λ désignant un nombre réel, de module inférieur à *un*.

On aura de même l'expression de $\log\frac{\sigma_1(ix+iz-i\varepsilon)}{\sigma_1(ix+iz+i\varepsilon)}$ en changeant dans la formule précédente les signes de z et de ε. On voit donc que dans tous les cas ces expressions seront égales à ε multiplié par une quantité qui reste toujours finie.

Ceci étant, il résulte de la première des deux équations (1) que l'expression

$$\int_0^{x_1-\eta_1} + \int_{x_1+\eta_1}^{2\pi}\varphi(z_1)\cot\frac{z_1-x_1}{2}\,dz_1,$$

lorsque η_1 tend vers zéro, tend vers la valeur limite

$$(28)\qquad 2\pi[\psi(x_1) - C_1] = 2\pi\psi(x_1) - \int_0^{2\pi}\psi(x_1)\,dx_1,$$

en désignant par ψ la fonction associée à φ. Or, d'après la théorie des équations (1), on sait qu'on peut considérer φ et ψ comme les valeurs prises sur la frontière d'un domaine simplement connexe, par la partie réelle et la partie imaginaire respectivement, d'une fonction analytique régulière dans le domaine. Si $\varphi(z_1)$ dépend d'un paramètre ε et tend vers zéro uniformément avec ε, on voit qu'à la limite, pour $\varepsilon = 0$, la fonction φ étant nulle, la fonction associée ψ sera constante, et par suite l'expression (28) sera nulle. Or, on peut passer de l'expression (28) à l'expression γ qu'il s'agit d'étudier, par un simple changement de notations. D'où le résultat cherché : les termes γ tendent, à la limite, vers zéro. Il est vrai

que le changement de variable auquel on vient de faire allusion, à savoir

$$z_1 = \frac{i\pi}{\omega_3} z,$$

remplace l'intervalle $0, 2\pi$ par $0, \frac{2\omega_3}{i}$ et non $0, \frac{\omega_3}{2i}$; mais comme rien n'empêche de supposer $\varphi(z_1)$ nulle identiquement entre $\frac{\pi}{2}$ et 2π, on se rend compte immédiatement qu'il n'y a aucune difficulté à conclure comme on l'a dit ci-dessus.

Il ne reste donc plus qu'à nous occuper de la quantité α, et à faire voir qu'elle tend vers $f(x)$. Nous allons déduire cette conclusion des propriétés déjà connues, du système (1). Revenons en effet à ce système, que nous écrirons en changeant légèrement les notations :

$$(29) \qquad \begin{cases} F(x_1) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(y_1)\cot\frac{x_1 - y_1}{2}\,dy_1 + C_1, \\[2ex] G(y_1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(z_1)\cot\frac{y_1 - z_1}{2}\,dz_1 + C_2. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la partie principale de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{x_1 - y_1}{2}\,dy_1$$

est nulle. Si par suite nous transportons $G(y_1)$ tirée de la seconde équation, dans la première, nous aurons, après avoir eu soin d'isoler deux petits intervalles autour des valeurs critiques, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &-C_1 + F(x_1) \\ &= \lim_{\varepsilon_1, \eta_1 \to 0} \frac{-1}{4\pi^2} \Bigg\{ \int_0^{x_1 - \varepsilon_1} dy_1 \int_0^{y_1 - \eta_1} \frac{F(z_1)\,dz_1}{\tang\dfrac{x_1 - y_1}{2}\tang\dfrac{y_1 - z_1}{2}} \\ &\quad + \int_0^{x_1 - \varepsilon_1} dy_1 \int_{y_1 + \eta_1}^{2\pi} \ldots dz_1 \\ &\quad + \int_{x_1 + \varepsilon}^{2\pi} dy_1 \int_0^{y_1 - \eta_1} \ldots dz_1 + \int_{x_1 + \varepsilon_1}^{2\pi} dy_1 \int_{y_1 + \eta_1}^{2\pi} \ldots dz_1 \Bigg\} \end{aligned}$$

ou encore

$$(30) \qquad F(x_1) - C_1 = \lim\,(J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

en désignant par J_1, J_2, J_3, J_4 les quatre termes du second membre. Or un calcul élémentaire donne pour l'intégrale indéfinie

$$(31)\qquad \int \frac{dy_1}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-y_1}{2}\operatorname{tang}\dfrac{y_1-z_1}{2}},$$

en supposant $z_1 \neq x_1$, la valeur

$$y_1 - 2\cot\frac{x_1-z_1}{2}\log\left|\frac{\sin\dfrac{y_1-x_1}{2}}{\sin\dfrac{y_1-z_1}{2}}\right|.$$

On en conclut successivement

$$J_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{y_1-\eta_1} F(z_1)\,dz_1\left[x_1-\varepsilon_1-\frac{2}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-z_1}{2}}\log\left|\frac{\sin\dfrac{\varepsilon_1}{2}\sin\dfrac{z_1}{2}}{\sin\dfrac{x_1-z_1-\varepsilon_1}{2}\sin\dfrac{x_1}{2}}\right|\right],$$

$$J_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{y_1+\eta_1}^{2\pi} F(z_1)\,dz_1\left[x_1-\varepsilon_1-\frac{2}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-z_1}{2}}\log\left|\frac{\sin\dfrac{\varepsilon_1}{2}\sin\dfrac{z_1}{2}}{\sin\dfrac{x_1-z_1-\varepsilon_1}{2}\sin\dfrac{x_1}{2}}\right|\right],$$

$$J_3 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{y_1-\eta_1} F(z_1)\,dz_1\left[2\pi-x_1+\varepsilon_1-\frac{2}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-z_1}{2}}\log\left|\frac{\sin\dfrac{x_1}{2}\sin\dfrac{x_1-z_1+\varepsilon_1}{2}}{\sin\dfrac{z_1}{2}\sin\dfrac{\varepsilon_1}{2}}\right|\right],$$

$$J_4 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{y_1+\eta_1}^{2\pi} F(z_1)\,dz_1\left[2\pi-x_1+\varepsilon_1-\frac{2}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-z_1}{2}}\log\left|\frac{\sin\dfrac{x_1}{2}\sin\dfrac{x_1-z_1+\varepsilon_1}{2}}{\sin\dfrac{z_1}{2}\sin\dfrac{\varepsilon_1}{2}}\right|\right],$$

et, par suite, en remarquant que l'intervalle voisin de $z_1 = y_1$ n'introduit plus de difficulté, mais qu'il faut par contre supposer $z_1 \neq x_1$, pour que le calcul de l'intégrale (31) reste valable, on obtient finalement l'égalité

$$F(x_1) - C_1 = \lim -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^{x_1-\delta_1} + \int_{x_1+\delta_1}^{2\pi}\right) F(z_1)\,dz$$
$$\times\left[2\pi - \frac{2}{\operatorname{tang}\dfrac{x_1-z_1}{2}}\log\left|\frac{\sin\dfrac{x_1-z_1+\varepsilon_1}{2}}{\sin\dfrac{x_1-z_1-\varepsilon_1}{2}}\right|\right].$$

Mais la valeur de C_1 est justement

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z_1)\,dz_1$$

(*cf.* par exemple mon Mémoire déjà cité des *Acta*, p. 108). De sorte qu'il nous reste

$$(32)\qquad F(x_1) = \lim_{\varepsilon_1,\,\delta_1 \to 0} \frac{1}{2\pi^2}\left[\int_0^{x_1-\delta_1} - \int_{x_1+\delta_1}^{2\pi}\right] F(z_1)\cot\frac{x_1 - z_1}{2}\log\left|\frac{\sin\dfrac{x_1 - z_1 + \varepsilon_1}{2}}{\sin\dfrac{x_1 - z_1 - \varepsilon_1}{2}}\right| dz_1.$$

Cela est, à peu de chose près, la conclusion que nous désirions obtenir. Faisons en effet dans cette équation le changement de variable

$$z_1 = \frac{i\pi z}{\omega_3}$$

et posons

$$x_1 = \frac{i\pi x}{\omega_3}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{i\pi\varepsilon}{\omega_3}, \qquad \delta_1 = \frac{i\pi\varepsilon_2}{\omega_3}.$$

Supposons en outre que $F(z_1)$, qui est une fonction qu'on peut choisir d'une façon entièrement arbitraire, soit égale à $f(z)$ dans l'intervalle $0, \frac{\omega_3}{2i}$ de valeurs de z, et à zéro en dehors de cet intervalle. Dans ces conditions, le second membre de la formule (32) coïncidera exactement avec l'expression α qu'il nous restait à étudier. Cette dernière expression α tend donc vers $f(x)$, ce qui achève notre démonstration.

Les formules (2) *et* (3) *sont donc bien réciproques* ainsi que nous l'avions annoncé. Vu la façon symétrique dont ces formules font intervenir les deux fonctions f et g, il est bien clair que tous les raisonnements des paragraphes antérieurs pourraient être transposés, *mutatis mutandis*, en renversant le rôle des deux équations. De sorte que l'équation (2) donne la solution de (3), tout aussi bien que (3) donne la solution de (2) ainsi que nous venons de le constater.

Nous allons maintenant donner, des développements qui précèdent, une application intéressante. Dans un problème de Phy-

sique mathématique dont l'exposé trouvera sa place ailleurs, on rencontre l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad & \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} g(y)[-\zeta\,(ix-iy)-\zeta\,(ix+iy) \\
&\qquad +\zeta_1(ix-iy)+\zeta_1(ix+iy) \\
&\qquad -\zeta_2(ix-iy)-\zeta_2(ix+iy) \\
&\qquad +\zeta_3(ix-iy)+\zeta_3(ix+iy)]\,dy \\
=-\pi\quad & \frac{i}{2\pi}\int_0^{\omega_1} h(t)[\quad\zeta\,(ix-t)+\zeta\,(ix+t) \\
&\qquad -\zeta_1(ix-t)-\zeta_1(ix+t) \\
&\qquad +\zeta_2(ix-t)+\zeta_2(ix+t) \\
&\qquad -\zeta_3(ix-t)-\zeta_3(ix+t)]\,dt
\end{aligned}
$$

qu'il s'agit de résoudre par rapport à la fonction inconnue $g(y)$. Si l'on désigne le second membre de cette équation par $f(x)$, celle-ci prend la forme exactement de l'équation (2) à laquelle s'applique la théorie antérieure, et par suite sa solution sera donnée par la formule (3). Explicitons ici cette solution.

Tout d'abord le terme constant qui intervient dans $f(x)$ fournira pour $g(y)$ l'expression

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad & i\int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} [-\zeta\,(iy-iz)+\zeta\,(iy+iz) \\
&\qquad -\zeta_1(iy-iz)+\zeta_1(iy+iz) \\
&\qquad +\zeta_2(iy-iz)-\zeta_2(iy+iz) \\
&\qquad +\zeta_3(iy-iz)-\zeta_3(iy+iz)]\,dz.
\end{aligned}
$$

Or l'intégrale indéfinie de la fonction (réelle), qu'il s'agit ici d'intégrer, est

$$\log\left|\frac{\sigma\,(iy-iz)\,\sigma\,(iy+iz)\,\sigma_1(iy-iz)\,\sigma_1(iy+iz)}{\sigma_2(iy-iz)\,\sigma_2(iy+iz)\,\sigma_3(iy-iz)\,\sigma_3(iy+iz)}\right|.$$

Pour $z=0$, elle prend la valeur

$$\log\left|\frac{\sigma^2\,iy\,\sigma_1^2\,iy}{\sigma_2^2\,iy\,\sigma_3^2\,iy}\right|.$$

Pour $z=\frac{\omega_3}{2i}$, on a la valeur

$$A=\log\left|\frac{\sigma\left(iy-\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma\left(iy+\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_1\left(iy-\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_1\left(iy+\frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma_2\left(iy-\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_2\left(iy+\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_3\left(iy-\frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_3\left(iy+\frac{\omega_3}{2}\right)}\right|.$$

Or on sait que

$$\sigma(u \mid \omega_1 \omega_3)\,\sigma_1(u \mid \omega_1 \omega_3) = e^{-\frac{e_1 u^2}{2}}\,\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)$$

et

$$\sigma_3(u \mid \omega_1 \omega_3)\,\sigma_3(u \mid \omega_1 \omega_3) = e^{-\frac{e_1 u^2}{2}}\,\sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right).$$

Donc la quantité A devient

$$A = \log\left|\frac{\sigma\left(iy + \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)\sigma\left(iy - \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)}{\sigma_3\left(iy + \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)\sigma_3\left(iy - \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)}\right|$$

ou encore

$$A = -\log\left|\xi_{30}\left(iy + \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)\xi_{30}\left(iy - \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right)\right|.$$

Mais en désignant par des grandes lettres les éléments E_i relatifs aux fonctions elliptiques aux demi-périodes $\frac{\omega_1}{2}\,\omega_3$, on a

$$\xi_{30}\left(u + \omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\,\omega_3\right) = -\sqrt{E_1 - E_3}\,\sqrt{E_2 - E_3}\,\xi_{03}\,u.$$

Donc

$$A = -\log\left(-\sqrt{E_1 - E_3}\,\sqrt{E_2 - E_3}\right).$$

Or (¹), on a

$$E_1 - E_3 = 3\,e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$
$$E_2 - E_3 = 3\,e_1 - 2\sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

et, par suite,

$$(E_1 - E_3)(E_2 - E_3) = 9\,e_1^2 - 4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = e_1^2 - 4\,e_2 e_3 = (e_2 - e_3)^2.$$

D'où enfin, en retenant que le radical $\sqrt{E_2 - E_3}$ a une détermination négative,

$$A = -\log(e_2 - e_3).$$

En fin de compte, le terme constant de f donne donc naissance, pour $g(y)$, à la portion suivante

$$-\log(e_2 - e_3) - \log\left|\frac{\sigma^2\,iy\;\sigma_1^2\,iy}{\sigma_2^2\,iy\;\sigma_3^2\,iy}\right|,$$

qu'on mettra aisément sous la forme

$$(35)\qquad \log\left|\frac{\xi_{30}^2\,iy\;\xi_{21}^2\,iy}{\xi_{30}^2\,\omega_2}\right|,$$

(¹) Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, XXII, 5.

en n'oubliant pas, bien entendu, que c'est la partie principale de l'intégrale (34) qu'il s'agissait de calculer.

Ceci posé, venons au terme essentiel qui figure dans $g(y)$ et qui dépend de la fonction h. Les calculs des paragraphes antérieurs nous permettront d'être un peu plus rapides dans ceux qui vont suivre. Un changement de l'ordre des intégrations, analogue à celui déjà rencontré plus haut, nous permet d'écrire le terme en question sous la forme

$$(36)\quad S = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\omega_1} h(t)\,dt \int_0^{\frac{\omega_3}{2i}} \begin{aligned}[t] &[\ \zeta(iz-t)+\zeta(iz+t) \\ &-\zeta_1(iz-t)-\zeta_1(iz+t) \\ &+\zeta_2(iz-t)+\zeta_2(iz+t) \\ &-\zeta_3(iz-t)-\zeta_3(iz+t)] \\ \times &[-\zeta(iy-iz)+\zeta(iy+iz) \\ &-\zeta_1(iy-iz)+\zeta_1(iy+iz) \\ &+\zeta_2(iy-iz)-\zeta_2(iy+iz) \\ &+\zeta_3(iy-iz)-\zeta_3(iy+iz)]\,dz, \end{aligned}$$

l'intervalle $y-\varepsilon$, $y+\varepsilon$ devant être réservé momentanément dans l'intégration relative à z.

Posons alors

$$\begin{aligned} U_1(\theta) = \ &[\ \zeta(\theta-t)+\zeta(\theta+t)-\zeta_1(\theta-t)-\zeta_1(\theta+t) \\ &+\zeta_2(\theta-t)+\zeta_2(\theta+t)-\zeta_3(\theta-t)-\zeta_3(\theta+t)] \\ &\times[-\zeta(iy-\theta)+\zeta(iy+\theta)-\zeta_1(iy-\theta)+\zeta_1(iy+\theta) \\ &+\zeta_2(iy-\theta)-\zeta_2(iy+\theta)+\zeta_3(iy-\theta)-\zeta_3(iy+\theta)]. \end{aligned}$$

On voit de suite que c'est là une fonction elliptique de θ, avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$; dans le rectangle des périodes déjà envisagé, ses pôles sont

$$\begin{aligned} p_1 &= iy, & p_9 &= t, \\ p_2 &= 2\omega_3 - iy, & p_{10} &= 2\omega_1 - t, \\ p_3 &= \omega_1 + iy, & p_{11} &= \omega_1 + t, \\ p_4 &= \omega_1 - 2\omega_3 - iy, & p_{12} &= \omega_1 - t, \\ p_5 &= -\omega_2 + iy, & p_{13} &= -\omega_2 - t, \\ p_6 &= -\omega_2 - iy, & p_{14} &= -\omega_2 - t, \\ p_7 &= \omega_3 + iy, & p_{15} &= \omega_3 + t, \\ p_8 &= \omega_3 - iy, & p_{16} &= \omega_3 + 2\omega_1 - t. \end{aligned}$$

Ce sont des pôles simples, avec seulement deux résidus distincts (au signe près), à savoir

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
r_1 = {} & \zeta\,(iy-t)+\zeta\,(iy+t)-\zeta_1(iy-t)-\zeta_1(iy+t)\\
& +\zeta_2(iy-t)+\zeta_2(iy+t)-\zeta_3(iy-t)-\zeta_3(iy+t),\\
& r_2=-r_1,\quad r_3=-r_1,\quad r_4=r_1,\quad r_5=r_1,\\
& \qquad r_6=-r_1,\quad r_7=-r_1,\quad r_8=r_1;\\
r_9 = {} & -\zeta\,(iy-t)+\zeta\,(iy+t)-\zeta_1(iy-t)+\zeta_1(iy+t)\\
& +\zeta_2(iy-t)-\zeta_2(iy+t)+\zeta_3(iy-t)-\zeta_3(iy+t),\\
& r_{10}=-r_9,\quad r_{11}=-r_9,\quad r_{12}=r_9,\quad r_{13}=-r_9,\\
& \qquad r_{14}=r_9,\quad r_{15}=r_9,\quad r_{16}=-r_9.
\end{aligned}\right.$$

On en conclut

$$\begin{aligned}
U_1(\theta) = C + r_1[\, & \zeta\,(\theta-iy)-\zeta\,(\theta+iy)-\zeta_1(\theta-iy)+\zeta_1(\theta+iy)\\
& +\zeta_2(\theta-iy)-\zeta_2(\theta+iy)-\zeta_3(\theta-iy)+\zeta_3(\theta+iy)]\\
+ r_9[\, & \zeta\,(\theta-t)-\zeta\,(\theta+t)-\zeta_1(\theta-t)+\zeta_1(\theta+t)\\
& -\zeta_2(\theta-t)+\zeta_2(\theta+t)+\zeta_3(\theta-t)-\zeta_3(\theta+t)],
\end{aligned}$$

C désignant une constante par rapport à θ. Pour déterminer cette constante, nous ferons $\theta=0$; U_1 devient nul et nous obtenons

$$C = 2r_1[\zeta iy-\zeta_1 iy+\zeta_2 iy-\zeta_3 iy]+2r_9[\zeta t-\zeta_1 t-\zeta_2 t+\zeta_3 t].$$

D'où, par conséquent

$$\begin{aligned}
U_1(\theta) = \; & r_1\Big\{\;[\zeta\,(\theta-iy)-\zeta\,(\theta+iy)+2\zeta\,iy]\\
& \qquad -[\zeta_1(\theta-iy)-\zeta_1(\theta+iy)+2\zeta_1 iy]\\
& \qquad +[\zeta_2(\theta-iy)-\zeta_2(\theta+iy)+2\zeta_2 iy]\\
& \qquad -[\zeta_3(\theta-iy)-\zeta_3(\theta+iy)+2\zeta_3 iy]\Big\}\\
& + r_9\Big\{\;[\zeta\,(\theta-t)-\zeta\,(\theta+t)+2\zeta\,t]\\
& \qquad -[\zeta_1(\theta-t)-\zeta_1(\theta+t)+2\zeta_1 t]\\
& \qquad -[\zeta_2(\theta-t)-\zeta_2(\theta+t)+2\zeta_2 t]\\
& \qquad +[\zeta_3(\theta-t)-\zeta_3(\theta+t)+2\zeta_3 t]\Big\}.
\end{aligned}$$

Observons maintenant qu'on a

$$\int[\zeta(\theta-iy)-\zeta(\theta+iy)+2\zeta iy]\,d\theta = 2\theta\zeta iy+\log\left[\frac{\sigma(\theta-iy)}{\sigma(\theta+iy)}\right]$$

et des formules analogues : par suite, en intégrant entre zéro

et $\frac{\omega_3}{2}$ et évitant le petit intervalle voisin du point iy, il nous vient

$$
\begin{aligned}
(38)\quad \int_0^{\frac{\omega_3}{2}} \mathrm{U}_1(\theta)\,d\theta = {} & \omega_3 r_1(\zeta iy - \zeta_1 iy + \zeta_2 iy - \zeta_3 iy) + \omega_3 r_9(\zeta t - \zeta_1 t - \zeta_2 t + \zeta_3 t) \\
& + r_1 \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - iy\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} + iy\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} - iy\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} + iy\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} + iy\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} - iy\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} + iy\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} - iy\right)} \right| \\
& + r_9 \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)} \right| \\
& + r_1 \log \left| \frac{\sigma(2iy + i\varepsilon)\sigma_1(2iy - i\varepsilon)\sigma_2(2iy + i\varepsilon)\sigma_3(2iy - i\varepsilon)}{\sigma(2iy - i\varepsilon)\sigma_1(2iy + i\varepsilon)\sigma_2(2iy - i\varepsilon)\sigma_3(2iy + i\varepsilon)} \right|.
\end{aligned}
$$

Or la partie qui dépend de ε, dans ce résultat, tend vers zéro avec ε. D'autre part, l'expression

$$
\left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_2\left(\frac{\omega_3}{2} - t\right)\sigma_3\left(\frac{\omega_3}{2} + t\right)} \right|
$$

prend la valeur 1 ainsi qu'il est loisible de s'en assurer en utilisant les propriétés connues des fonctions σ_α. On peut en outre simplifier le coefficient de r_1 en employant des formules telles que la suivante :

$$
\sigma\left(iy + \frac{\omega_3}{2}\right) = \sigma\left(iy - \frac{\omega_3}{2} + \omega_3\right) = e^{\eta_3\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)}\sigma\omega_3\,\sigma_3\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right).
$$

Portant ce résultat dans S, nous parvenons en fin de compte à cette conséquence, que la solution de l'équation (33) est donnée par la formule

$$
\begin{aligned}
(39)\quad g(y) = {} & \log \left| \frac{\zeta^2_{30}\, iy\, \zeta^2_{21}\, iy}{\zeta^2_{30}\, \omega_2} \right| \\
& + \frac{i}{4\pi^2}\int_0^{\omega_1} h(t) \left\{ \begin{aligned} & r_1\omega_3(\zeta iy - \zeta_1 iy + \zeta_2 iy - \zeta_3 iy) \\ & + 2r_1 \log \left| \frac{\sigma\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_2\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_1\omega_3}{\sigma_1\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_3\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma\omega_3} \right| \\ & + r_9\omega_3(\zeta t - \zeta_1 t - \zeta_2 t + \zeta_3 t) \end{aligned} \right\} dt,
\end{aligned}
$$

qui peut encore s'écrire

$$(40)\quad g(y) = \log\left|\frac{\xi_{30}^2 iy\, \xi_{21}^2 iy}{\xi_{30}^2 \omega_2}\right| + \frac{i\omega_3}{4\pi^2}\int_0^{\omega_1} h(t) r_9 [\zeta t - \zeta_1 t - \zeta_2 t + \zeta_3 t)\, dt$$

$$+ \frac{i}{4\pi^2}\Bigg[\omega_3(\zeta iy - \zeta_1 iy + \zeta_2 iy - \zeta_3 iy)$$

$$+ 2\log\left|\frac{\sigma\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_2\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_1\omega_3}{\sigma_1\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma_3\left(iy - \frac{\omega_3}{2}\right)\sigma\,\omega_3}\right|\Bigg]\int_0^{\omega_1} r_1 h(t)\, dt$$

et où les quantités r_1 et r_9 doivent être remplacées par les expressions (37). Dans cette dernière formule, le pôle $t = 0$ de la fonction ζt semble introduire une difficulté, mais cette difficulté n'est qu'apparente, car on voit que r_9 s'annule pour $t = 0$ quel que soit y.

Je vais maintenant faire voir que, pour le cas particulier de l'équation (33), la solution que nous venons de construire peut, au moyen d'un procédé tout à fait détourné, se mettre sous une autre forme, sensiblement plus avantageuse. Tel va être le but de ce dernier paragraphe.

J'observerai tout d'abord qu'il résulte des considérations développées dans mon Mémoire cité plus haut ([1]) que, si l'on envisage la fonction

$$\Omega(F) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} h(t)[\zeta(F - t) + \zeta(F + t) - \zeta_3(F - t) - \zeta_3(F + t)]\, dt$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} G(t)[\zeta(F - it) + \zeta(F + it) - \zeta_1(F - it) - \zeta_1(F + it)]\, dt$$

et si l'on pose

$$G(t) = -g(t) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < \frac{\omega_3}{2i}$$

et

$$G(\omega_3 - t) = -G(t) \qquad \text{pour définir G entre } \frac{\omega_3}{2i} \text{ et } \frac{\omega_3}{i},$$

cette fonction $\Omega(F)$ jouit des propriétés suivantes : elle est analytique et régulière dans le rectangle de dimensions ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$. Sa

([1]) *Acta*, t. XL, *cf.* p. 154 et suiv.

partie réelle prend la valeur $h(u)$ pour $F = u$ et pour $F = \omega_3 + u$ $(o < u < \omega_1)$, et sa partie imaginaire prend la valeur $-g(v)$ pour $F = iv$ et pour $F = \omega_1 + iv\left(o < v < \frac{\omega_3}{2i}\right)$. Or si l'on calcule les parties réelles A_1 et A_2 de cette fonction en des points de même ordonnée sur les deux bords verticaux du rectangle, c'est-à-dire respectivement pour $F = iv$ et $F = \omega_1 + iv\left(o < v < \frac{\omega_3}{2i}\right)$, on constatera, au bout d'un calcul sans autre difficulté que sa longueur, que l'équation (33) ci-dessus exprime l'égalité

$$A_2 - A_1 = 2\pi.$$

En outre, il est aisé de se rendre compte que $\Omega(F)$ est réel pour $F = \frac{\omega_3}{2} + u\,(o < u < \omega_1)$.

Cela étant, posons

$$F_1 = F - \frac{\omega_3}{2}$$

et faisons la transformation

$$F_1 = \frac{\omega_1}{2i\pi}\log s = \frac{\omega_1}{2i\pi}(\log\rho + i\varphi),$$

en prenant pour l'angle φ la détermination comprise entre zéro et 2π; cette transformation fait correspondre au demi-rectangle supérieur du plan F, une couronne circulaire. La circonférence $|s| = 1$ correspond à $F = \frac{\omega_3}{2} + u$; la circonférence

$$|s| = q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}$$

correspond à $F = \omega_3 + u\,(o < u < \omega_1)$. Dans ce domaine, la fonction $\Omega(F)$ deviendra une fonction de s, $\Omega_1(s)$ à la vérité non uniforme, mais la différence

$$\Omega_2 = \Omega_1(s) - \frac{1}{i}\log s$$

sera uniforme, en choisissant pour $\log s$ une détermination quelconque, par exemple celle dont l'argument est compris entre zéro et 2π.

On vérifie maintenant de suite que, pour cette nouvelle fonction $\Omega_2(s)$, la partie imaginaire est nulle pour $|s| = 1$, tandis que.

pour $s = qe^{i\varphi}$, la partie réelle devient égale à $H(\varphi) - \varphi$, en désignant par $H(\varphi)$ ce que devient la fonction $h(u)$ quand on y remplace u par $\frac{\omega_1 i}{2\pi}\varphi$, c'est-à-dire en posant

$$h\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\varphi\right) \equiv H(\varphi).$$

Or il résulte de mon Mémoire [1] qu'une telle fonction $\Omega_2(s)$ peut recevoir la forme suivante :

$$\Omega_2(s) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}[H(\varphi)-\varphi]\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega_1'}{i\pi}\log s - \frac{\omega_1'}{\pi}\varphi - \frac{\omega_3'}{2}\,\middle|\, \omega_1', \omega_3'\right),$$

les demi-périodes ω_1' et ω_3' étant liées à q par la relation

$$q = e^{-\frac{\pi\omega_3'}{2i\omega_1'}}.$$

D'après ce qui précède, cela permet de prendre

$$\omega_1' = \omega_1,$$
$$\omega_3' = 2\omega_3.$$

On a alors

$$\Omega_1(s) = -i\log s$$
$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}[H(\varphi)-\varphi]\, d\log\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log s - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3\,\middle|\, \omega_1, 2\omega_3\right).$$

Remarquons maintenant que le bord vertical gauche

$$F_1 = ip\left(0 < p < \frac{\omega_3}{2i}\right)$$

correspond dans le plan s à la portion d'axe réel définie par $\varphi = 0$, $q < \rho < 1$, au moyen de la relation

$$p = -\frac{\omega_1}{2\pi}\log\rho.$$

Aux points correspondants, le coefficient de i dans $\Omega_1(s)$ est

$$G(\rho) = -\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi^2}\,\mathrm{R}\int_0^{2\pi}[H(\varphi)-\varphi]$$
$$\times\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3\,\middle|\, \omega_1, 2\omega_3\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3\right)\right]d\varphi.$$

---

[1] *Acta*, p. 108.

le signe R signifiant : Partie réelle de l'expression qui suit; c'est-à-dire

$$
G(\rho) = -\log\rho + \frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}[H(\varphi)-\varphi]
$$

$$
\times\left\{\begin{aligned}
&\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right) + \zeta_3\left(-\frac{\omega_3}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3\right)\\
&-\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3\right) \qquad - \zeta\left(-\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3\right)
\end{aligned}\right\} d\varphi.
$$

Or on a

$$
\begin{aligned}
&\zeta_3\left(-\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right)\\
&= \eta_3 - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right)
\end{aligned}
$$

et de même

$$
\begin{aligned}
&\zeta\left(-\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right)\\
&= \eta_3' - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right)
\end{aligned}
$$

en désignant par η_3' la quantité analogue à η_3 relative aux fonctions elliptiques de demi-périodes ω_1, $2\omega_3$. On en conclut

$$
G(\rho) = -\log\rho + \frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}[H(\varphi)-\varphi]
$$

$$
\times\left\{\begin{aligned}
&\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3 \middle| \omega_1\, 2\omega_3\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}\varphi - \omega_3\right)\\
&+\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3\right) \qquad - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}\varphi + \omega_3\right)
\end{aligned}\right\} d\varphi.
$$

Or la fonction $G(\rho)$ deviendra précisément, d'après les remarques faites au début, la fonction g qu'il s'agissait de déterminer, en faisant correspondre convenablement les points des deux plans s et F; on voit aisément que $G(\rho)$ sera identique à $g(t)$ si l'on fait la substitution

$$
\frac{\omega_1}{\pi}\log\rho = 2t + i\omega_3.
$$

Faisons en même temps, dans la formule précédente,

$$
\frac{\omega_1}{2\pi}\varphi = u,
$$

on voit que l'on obtiendra

$$g(t) = -\frac{2\pi}{\omega_1}t + \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1}\left(h(u) - \frac{2\pi u}{\omega_1}\right)$$
$$\times\begin{bmatrix} \zeta_3(-2it - 2u \mid \omega_1 2\omega_3) - \zeta(-2it - 2u) \\ +\zeta_3(-2it + 2u + 2\omega_3) \quad -\zeta(-2it + 2u) \end{bmatrix} du.$$

La quantité entre crochets, qui peut s'écrire

$$P = \zeta(2u + 2it) + \zeta(2u - 2it) - \zeta_3(2u + 2it) - \zeta_3(2u - 2it)$$

est visiblement réelle, ainsi qu'il fallait s'y attendre. En utilisant les formules d'homogénéité

$$\zeta_\alpha(2x \mid \omega_1 2\omega_3) = \frac{1}{2}\zeta_\alpha\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\omega_3\right)$$

et les relations

$$\zeta\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\omega_3\right) = e_1 x + \zeta(x \mid \omega_1\omega_3) + \zeta_1(x \mid \omega_1\omega_3),$$

$$\zeta_3\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}\omega_3\right) = e_1 x + \zeta_2(x \mid \omega_1\omega_3) + \zeta_3(x \mid \omega_1\omega_3),$$

on voit qu'elle pourra prendre la forme

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \zeta(u + it \mid \omega_1\omega_3) + \zeta(u - it) + \zeta_1(u + it) + \zeta_1(u - it) \\ -\zeta_2(u + it) \qquad -\zeta_2(u - it) - \zeta_3(u + it) - \zeta_3(u - it) \end{bmatrix},$$

les fonctions ζ qui interviennent dans cette formule étant construites avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$. La solution de l'équation (33) sera donc obtenue sous la forme définitive

$$(41)\quad g(t) = -\frac{2\pi}{\omega_1}t + \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega_1}\left(h(u) - \frac{2\pi u}{\omega_1}\right)$$
$$\times\begin{bmatrix} \zeta(u + it) + \zeta(u - it) + \zeta_1(u + it) + \zeta_1(u - it) \\ -\zeta_2(u + it) - \zeta_2(u - it) - \zeta_3(u + it) - \zeta_3(u - it) \end{bmatrix} du.$$

évidemment plus avantageuse que l'expression (40) obtenue par la première méthode.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TURRIÈRE (ÉMILE). — SUR LE CALCUL DES OBJECTIFS ASTRONOMIQUES DE FRAUNHOFER. *Travaux du Bureau d'Études d'Optique du Service géographique de l'Armée;* Fascicule n 1. Un vol. in-8, 123 p., 2 fig., 3 pl. hors texte. Paris, imprimerie du Service géographique de l'Armée, décembre 1917.

Le Mémoire de M. E. Turrière forme le premier fascicule d'un ensemble de publications sur diverses questions d'Optique appliquée. Dans ce travail, l'Auteur a étudié le problème des objectifs de Fraunhofer. Ces objectifs, les plus importants des objectifs astronomiques, jouissent d'une propriété remarquable, qui les caractérise parmi les systèmes à deux éléments : ils sont corrigés simultanément des deux aberrations sphériques (suivant l'axe, et en dehors de l'axe).

Le but principal de l'Auteur a été de réduire à une forme canonique définitive les équations du problème, en insistant, plus spécialement, sur les objectifs ordinaires des bonnes longues vues.

C'est là un sujet qui a été traité dans de nombreux travaux; il semble pourtant que, jusqu'à présent, les Auteurs aient un peu trop négligé les qualités de simplicité, de symétrie et de clarté qui s'imposent ici, peut-être, plus qu'ailleurs. Le plus souvent, les Calculs se présentaient sous une forme lourde, rebutante et rebelle aux applications.

Par ses élégantes recherches sur la Géométrie infinitésimale et, notamment, sur les Congruences, M. E. Turrière était tout indiqué pour mettre au point la question; et, en effet, par un choix heureux de paramètres et d'inconnues, il a été conduit à des formules très simples qui lui ont permis d'approfondir divers problèmes importants pour la pratique. C'est ainsi qu'il a pu obtenir les expressions explicites des coefficients de l'équation [1] du cinquième degré qui détermine le choix des verres des objectifs

[1] Cette équation, qu'on a appelée en Allemagne *équation de von Hœgh*, doit porter le nom de O. F. Mossotti.

ordinaires de longue-vue. Et, partant de là, il a pu donner une solution rapide d'un problème abordé précédemment par H. Harting.

A diverses reprives, d'ailleurs, l'Auteur s'est servi du langage géométrique qui permet une interprétation attrayante de la discussion. Ajoutons enfin que le côté historique a été constamment examiné avec impartialité, et que les indications bibliographiques ont été mentionnées soigneusement.

En résumé, il s'agit là d'une étude très sérieuse, qui ne doit pas rester isolée; l'Auteur annonce, en effet, la publication de divers travaux d'Optique appliquée, et, notamment, de traductions ou exposés des recherches de l'École d'Iéna.

R. Garnier.

MÉLANGES.

SUR UN THÉORÈME RELATIF A L'EXTENSION DU THÉORÈME DE ROLLE AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES;

Par M. E. Gau.

M. Mladen T. Beritch a énoncé le théorème suivant :

Etant données deux fonctions $f(x, y)$ *et* $\varphi(x, y)$, *continues à l'intérieur d'un contour* C *et admettant des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* x *et* y *continues pour tous les points à l'intérieur du contour* C, *si ces fonctions s'annulent aux deux points* A *et* B, *le déterminant fonctionnel* $\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ *s'annulera le long d'un nombre impair de lignes* L *qui séparent les points* A *et* B, *en ce sens qu'on ne peut pas passer du point* A *au point* B *sans traverser un nombre impair de lignes* L.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 166, 1918, p. 279.

Ce théorème, tout au moins sous la forme générale où il est énoncé, est inexact. Prenons, en effet :

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \qquad \varphi(x, y) = 2xy,$$

et deux points A $(x = 1, y = o)$ et B $(x = -1, y = o)$ où s'annulent ces fonctions. Le déterminant fonctionnel est ici égal à $4(x^2 + y^2)$; donc il n'existe aucune ligne L.

Le raisonnement de l'auteur, appliqué à cet exemple particulier, montre aisément le défaut de sa démonstration; on voit ainsi que les deux surfaces :

$$\lambda z + x^2 - y^2 - 1 = 0,$$
$$\mu z + 2xy = 0,$$

qui sont continues et passent par A et B, se coupent suivant une ligne discontinue qui n'admet pas de tangente parallèle au plan $x\,o\,y$.

La même observation s'applique au théorème réciproque, énoncé par l'auteur comme conséquence du précédent, ainsi qu'aux généralisations pour les fonctions de n variables.

SUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS;

Par M. H. VERGNE.

I. — Formules générales des perturbations.

1. Je considère un système de $2n$ équations *canoniques*

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définissant le mouvement d'un système mécanique. La fonction caractéristique F (ξ_i, η_i, t) peut dépendre explicitement du temps t.

Je suppose qu'on ait su intégrer complètement ce système : alors les ξ_i, η_i seront des fonctions connues du temps t et de $2n$ constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$.

Je suppose maintenant, ainsi qu'il arrive en Mécanique céleste, que l'on ait à étudier un second mouvement *voisin* du premier, et soient

$$\text{(II)} \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations canoniques qui définissent ce nouveau mouvement, $F(x_i, y_i, t)$ étant la *même* fonction caractéristique (où les lettres x_i, y_i remplacent simplement les lettres ξ_i, η_i) et $\varepsilon f(x_i, y_i, t)$ désignant une petite *fonction perturbatrice*.

Nous allons envisager ce second mouvement comme ne différant du premier que parce qu'il est troublé par l'action de la fonction perturbatrice. A cet effet, nous posons

$$x_i = \xi_i + \delta\xi_i, \qquad y_i = \eta_i + \delta\eta_i,$$

et nous allons chercher des formules donnant les perturbations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, en tenant seulement compte de la première puissance du coefficient perturbateur ε, et en négligeant ε^2.

Considérons l'équation auxiliaire, aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}\frac{\partial F}{\partial\eta_i} - \frac{\partial\sigma}{\partial\eta_i}\frac{\partial F}{\partial\xi_i} \right) = -f(\xi_i, \eta_i, t),$$

que nous écrirons ainsi

$$(1) \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} - (\sigma, F) = -f,$$

la notation (σ, F) désignant, suivant l'usage, la *parenthèse de Poisson* relative aux deux fonctions $\sigma(\xi_i, \eta_i, t)$ et $F(\xi_i, \eta_i, t)$.

Je suppose que, de cette équation, nous ayons su obtenir une intégrale particulière quelconque $\sigma(\xi_i, \eta_i, t)$. *Il suffira de poser*

$$\delta\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_i}, \qquad \delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i},$$

pour avoir résolu les équations (II).

La vérification de cette affirmation est immédiate : il suffit, dans les équations (II), de remplacer x_i par $\xi_i - \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_i}$, y_i par $\eta_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}$, pour constater qu'on a des identités (en négligeant ε^2),

en vertu des équations (I) et (1) : la première équation (II), par exemple, devient identique à l'équation (1) différentiée par rapport à η_i.

Il reste à obtenir effectivement de l'équation (1) une intégrale $\sigma(\xi_i, \eta_i, t)$. C'est ce qui va être immédiat, au moyen d'une quadrature. Écrivons à cet effet les intégrales générales des équations (I) sous la forme

$$(2)\qquad \xi_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \qquad \eta_i = \psi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n});$$

ces $2n$ formules peuvent être considérées comme définissant un *changement de variables* permettant de passer des $2n$ lettres ξ_i, η_i aux $2n$ lettres C (ou inversement) (ce changement de variables dépendant explicitement du paramètre t).

Exprimons alors la fonction $f(\xi_i, \eta_i, t)$ au moyen des nouvelles variables C : elle devient une fonction $f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)$ de ces nouvelles variables et du temps t. Si nous posons

$$(3)\qquad \sigma = -\int_{t_0}^{t} f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)\,dt,$$

quadrature où les lettres C sont traitées comme des constantes, nous avons là une fonction $\sigma(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)$ qu'on peut exprimer au moyen des formules (2) en fonction des variables ξ_i, η_i, et t. Cette fonction $\sigma(\xi_i, \eta_i, t)$ satisfait identiquement à l'équation (1). Il est très facile de le vérifier par le calcul; on peut aussi remarquer sur la formule (3) que $-f$ est la dérivée de σ par rapport à t lorsque les C ne varient pas, c'est-à-dire lorsque les ξ_i, η_i vérifient les équations (I); or le premier membre de (1) désigne précisément la même dérivée.

Ainsi, *il a suffi d'exprimer la fonction perturbatrice f en fonction des constantes d'intégration C du mouvement non troublé; de calculer la fonction σ par la quadrature* (3); *d'exprimer cette fonction σ au moyen des variables ξ_i, η_i; pour en déduire immédiatement, au moyen des formules*

$$(4)\qquad \delta\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_i}, \qquad \delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i},$$

les valeurs explicites des perturbations $\delta\xi_i, \delta\eta_i$ à partir d'une

époque quelconque t_0 (les quantités $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ annulent, en effet, comme σ, pour $t = t_0$) (¹).

2. Une remarque s'impose ici. Dans la quadrature (3), nous avons pris comme limite inférieure d'intégration l'époque t_0 à partir de laquelle nous voulons calculer les perturbations. En d'autres termes, les formules (4) donnent les perturbations des éléments du mouvement troublé, à partir des éléments du mouvement non troublé auquel il est « osculateur » à l'instant t_0 (²).

Mais nous aurions pu prendre comme limite inférieure d'intégration un autre instant quelconque t'. Plus généralement, nous aurions pu prendre, au lieu de σ, une autre intégrale particulière quelconque σ' de l'équation (1), et en déduire d'autres valeurs

$$\delta'\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma'}{\partial\eta_i}, \qquad \delta'\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma'}{\partial\xi_i},$$

pour les perturbations. A quoi cela aurait-il correspondu?

La fonction $\sigma'' = \sigma - \sigma'$ satisfait à l'équation

$$\text{(1 bis)} \qquad \frac{\partial\sigma''}{\partial t} + (\sigma'', \mathrm{F}) = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (1) sans second membre. Cela prouve que

$$\sigma'' = \text{const.}$$

est une intégrale première du mouvement non troublé (I), et que les différences

$$\delta''\xi_i = \delta\xi_i - \delta'\xi_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma''}{\partial\eta_i},$$

$$\delta''\eta_i = \delta\eta_i - \delta'\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma''}{\partial\xi_i}$$

sont des perturbations qui correspondent à une fonction perturbatrice identiquement nulle; autrement dit que $\xi_i + \delta''\xi_i$,

(¹) H. Vergne, *C. R. Acad. Sc.*, 20 novembre 1916, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre et décembre 1917.

(²) Nous disons, suivant l'usage, qu'un mouvement troublé et un mouvemen non troublé sont « osculateurs » à un certain instant, si, à cet instant les positions et les vitesses des deux mouvements sont les mêmes.

$\eta_i + \delta''\eta_i$ sont un système de solutions des équations (I) infiniment voisin du système ξ_i, η_i.

On voit donc que $\delta'\xi_i$, $\delta'\eta_i$ constituent bien un système de perturbations : seulement ces perturbations, au lieu d'être calculées à partir du mouvement non troublé (ξ_i, η_i) sont calculées à partir d'un mouvement non troublé ($\xi_i + \delta''\xi_i$, $\eta_i + \delta''\eta_i$) infiniment voisin, et correspondant à des valeurs infiniment peu différentes des conditions initiales.

3. Faisons encore, en passant, une autre remarque. Soit $\varphi(\xi_i, \eta_i)$ une fonction quelconque des variables non troublées ξ_i, η_i. Que devient-elle lorsqu'on remplace les ξ_i, η_i par les valeurs troublées

$$x_i = \xi_i + \delta\xi_i, \qquad y_i = \eta_i + \delta\eta_i?$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}\varphi(x_i, y_i) &= \varphi(\xi_i, \eta_i) + \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_i}\delta\eta_i\right)\\ &= \varphi(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon(\sigma, \varphi),\end{aligned}$$

d'après les formules (4). Nous pouvons donc dire que la « perturbation » de la fonction $\varphi(\xi_i, \eta_i)$ a pour valeur

$$\delta\varphi = \varepsilon(\sigma, \varphi).$$

Supposons que

$$\varphi(\xi_i, \eta_i) = \text{const.}$$

soit une intégrale du mouvement non troublé. La formule précédente nous montre encore que

$$\varphi(x_i, y_i) - \varepsilon(\sigma, \varphi) = \text{const.}$$

sera une intégrale du mouvement troublé.

En particulier, supposons la fonction perturbatrice f identiquement nulle, si bien que les équations (II) coïncident avec les équations (I). Alors σ est une solution σ'' de l'équation (1 *bis*) sans second membre, et

$$\sigma'' = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (I).

$$\varphi - \varepsilon(\sigma'', \varphi) = \text{const.}$$

est alors une intégrale de ces mêmes équations (I), dépendant du paramètre arbitraire infiniment petit ε.

Nous en déduisons le théorème bien connu de Poisson : *Si φ et φ'' sont deux intégrales des équations* (I), (φ'', φ) *en est une troisième.*

4. La méthode qui vient d'être exposée pour le calcul des perturbations ne diffère pas essentiellement de la méthode classique de la *variation des constantes;* elle n'est qu'une façon particulière d'exposer cette méthode. Seulement, ici, au lieu de calculer les variations des constantes d'intégration C, nous calculons directement les variations des *variables* ξ_i, η_i elles-mêmes, au moyen des formules (4).

Ces formules (4) ne sont pas seulement très simples au point de vue formel, mais elles paraissent aussi susceptibles d'applications pratiques. A titre d'exercice, nous allons en faire ici l'application aux deux problèmes principaux de la Mécanique céleste : perturbations du mouvement elliptique képlérien d'une planète, et mouvement d'un corps céleste autour de son centre de gravité. Nous serons conduits à des calculs analogues et aux mêmes résultats que par les méthodes usuelles. Pendant que nous serons en train d'étudier ces deux problèmes, nous en profiterons, en terminant, pour rappeler comment on peut les aborder par des voies entièrement élémentaires, et sans faire appel à aucune connaissance de Mécanique analytique.

II. — Application aux problèmes de la Mécanique céleste.

5. *Théorème de Lagrange-Poisson.* — Dans les problèmes de la Mécanique céleste, il arrive le plus souvent que la fonction caractéristique $F(\xi_i, \eta_i)$ du mouvement non troublé ne contient pas explicitement t, *ne dépend pas des* η_i, et ne dépend pas non plus de *tous* les ξ_i : elle ne dépend que de *quelques* ξ_i, que nous appellerons les ξ_a, réservant la lettre ξ_b pour ceux des ξ_i qui ne figurent pas dans F. Nous distinguerons de même les η_i en deux groupes, les η_a et les η_b, correspondant respectivement aux ξ_a et aux ξ_b.

Quant à la fonction perturbatrice $f(\xi_i, \eta_i, t)$, elle dépend de

toutes les variables ξ_i, η_i, *mais elle est fonction périodique des* η_i; elle peut aussi dépendre explicitement de t, mais sous forme *périodique* également.

Dans ces conditions, les équations (I) du mouvement non troublé nous apprennent immédiatement que tous les ξ_i sont des constantes, ainsi que les η_b; quant aux η_a ce sont des fonctions linéaires du temps ([1])

$$\eta_a = n_a t + k_a.$$

Observons que les constantes

$$n_a = -\frac{\partial F}{\partial \xi_a}$$

sont des fonctions connues des ξ_a, ce ne sont donc pas des constantes d'intégration indépendantes. Les $2n$ constantes d'intégration (celles que nous appelions plus haut C_1, C_2, ..., C_{2n}) sont les ξ_i, les η_b, et les k_a.

Puisque la fonction perturbatrice f est fonction périodique des η_i et du temps t, nous pouvons la développer en série trigonométrique sous la forme

$$(5)\qquad f = \sum A \cos(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_n\eta_n + \beta t + \gamma).$$

où les α, β, γ sont des constantes (les α sont d'ailleurs des nombres entiers), et où les A sont des fonctions des ξ_i.

Le calcul de la fonction $\sigma(\xi_i, \eta_i, t)$ par la quadrature (3) est alors immédiat :

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sigma &= -\int_{t_0}^{t} \sum A \cos(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_n\eta_n + \beta t + \gamma)\, dt \\ &= -\sum \frac{A}{\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \beta} \sin(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_n\eta_n + \beta t + \gamma) + K \end{aligned}$$

Le terme K est une constante de quadrature calculée de façon que σ s'annule pour $t = t_0$. Ce terme K *ne dépend pas du temps :* il dépend seulement des constantes d'intégration du mouvement non troublé : en d'autres termes, il est lui-même une intégrale du mouvement non troublé, et joue le rôle de la quantité σ'' dont il

---

([1]) Dans les applications qui suivent, les η_a seront des angles, et les n_a des vitesses angulaires.

est parlé au n° 2. Les termes des perturbations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ qui proviendront de ce terme K correspondront uniquement à un changement infiniment petit des conditions initiales du mouvement non troublé : on pourra donc en faire abstraction, étant entendu que les perturbations seront calculées, non pas à partir du mouvement non troublé « osculateur » à l'instant t_0, mais à partir d'un autre mouvement non troublé très voisin de celui-là.

Les formules (4) deviennent alors

$$(7)\quad \begin{cases} \delta\xi_i = \quad \varepsilon\sum \dfrac{A'}{\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \beta}\cos(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_n\eta_n + \beta t + \gamma), \\ \delta\eta_i = -\varepsilon\sum \dfrac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\dfrac{A}{\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \beta}\right)\sin(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_n\eta_n + \beta t + \gamma). \end{cases}$$

Ces formules résolvent complètement le problème [1], *elles donnent les valeurs entièrement explicites des perturbations.* La seule opération préliminaire à effectuer est le développement de la fonction perturbatrice sous la forme trigonométrique (5), opération qu'il faudra effectuer dans chaque cas et que nous n'étudierons pas ici.

Étudions de plus près les perturbations, telles qu'elles sont données par les formules (7). Tout d'abord, remarquons qu'elles sont, en général, essentiellement *périodiques :* le temps t n'y figure en effet que sous les signes sinus ou cosinus, et son coefficient y est

$$(8)\qquad \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \beta.$$

Il y aura toutefois exception, et nous aurons alors un terme *séculaire* (linéaire en t), lorsque ce coefficient sera nul. Car alors le terme correspondant du développement (5) de la fonction perturbatrice f sera indépendant de t, et la quadrature (6) introduira dans σ, et par suite dans $\delta\xi_i$ et $\delta\eta_i$, un terme linéaire en t.

Si nous nous rappelons que les lettres n_a qui figurent dans le coefficient (8) proviennent des seuls η_a (les η_b ne dépendant pas de t), nous voyons d'abord que le coefficient (8) sera nul dans le cas où β sera nul en même temps que tous les nombres entiers

---

[1] Ces formules sont presque identiques à celles données par H. Poincaré dans ses *Leçons de Mécanique céleste* (t. II, p. 2), et nous y arrivons, somme toute, presque par les mêmes procédés.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, qui correspondent aux η_a. *Le terme correspondant de σ ne dépendra pas des η_a*, il ne dépendra que des η_b et des ξ_i. Les perturbations séculaires correspondantes des η_i et des ξ_b

$$\delta\eta_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_i}, \qquad \delta\xi_b = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_b}$$

pourront ne pas être nulles, mais les perturbations des ξ_a

$$\delta\xi_a = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_a}$$

seront nulles.

Ainsi *les variables ξ_a qui figurent effectivement dans la fonction caractéristique* $F(\xi_a)$ *du mouvement non troublé n'ont pas de perturbations séculaires.* C'est en cela que consiste le célèbre théorème de Lagrange-Poisson.

En dehors du cas où β est nul en même temps que tous les α_a, il pourrait arriver accidentellement que l'un des coefficients (8) soit nul, s'il existait entre les lettres n_a une relation linéaire à coefficients entiers de la forme

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \beta = 0; \tag{9}$$

mais les n_a sont des quantités qui dépendent des constantes d'intégration du mouvement non troublé, et la probabilité pour qu'une telle relation existe est infiniment petite; nous supposerons qu'elle n'existe pas. Mais alors, si les coefficients (8) ne peuvent s'annuler, il peut arriver que l'un d'entre eux soit très petit, si la relation (9), sans être exactement vérifiée, l'est approximativement. Les formules (7) montrent alors que les perturbations correspondantes sont très grandes : on dit qu'elles sont affectées d'un « petit diviseur » [1]. Observons, sur les formules (7), que ce « petit diviseur » figurera à la première puissance pour les perturbations $\delta\xi_i$ et $\delta\eta_b$, mais qu'il figurera *au carré* pour les $\delta\eta_a$ (les n_a dépendent, en effet, des ξ_a et pas des ξ_b). Ce seront donc les variables η_a qui auront leurs perturbations le plus affectées par le « petit diviseur ».

Nous avons donc achevé le calcul des perturbations qui sont de l'ordre de la première puissance du coefficient perturbateur ε.

---

[1] H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 124.

Ces perturbations comportent des termes de deux sortes : périodiques et séculaires. Ces derniers ont une importance toute spéciale, parce que leurs effets se cumulent; les termes périodiques affectés d'un « petit diviseur » ont aussi une importance particulière.

Si l'on voulait pousser l'approximation jusqu'à l'ordre de ε^2, ε^3, ..., ce que nous ne ferons pas ici, on verrait apparaître une troisième sorte de termes, dits *séculaires mixtes*, parce que le temps y figure à la fois sous les signes sinus et cosinus, et en dehors de ces signes.

Il nous reste à faire l'application des formules à des problèmes concrets.

6. *Perturbations d'un mouvement káplérien.* — Comme première application nous étudierons les perturbations du mouvement d'une planète P de masse m, soumise à l'attraction du Soleil de masse M, et troublée par l'action d'une autre planète de masse m'.

Nous prenons comme mouvement non troublé le mouvement de la planète P rapporté au Soleil; ce mouvement non troublé est le mouvement elliptique képlérien d'un point mobile attiré par un centre fixe de masse $M + m$; il est complètement défini par les six éléments suivants :

a, demi-grand axe;
e, excentricité;
i, inclinaison;
θ, longitude du nœud;
ϖ, longitude du périhélie;
l', longitude moyenne.

La connaissance de ces six éléments entraîne en effet, à chaque instant, la connaissance des coordonnées du point P et de sa vitesse.

Mais ces six éléments ne constituent pas un système de *variables canoniques*, c'est-à-dire qu'en les adoptant pour inconnues, les équations de mouvement n'auront pas la forme canonique. Or il est nécessaire, pour l'application de nos formules, que nous employions un système de variables canoniques.

Posons

$$L = m\sqrt{M + m}\sqrt{a}, \qquad G = L\sqrt{1 - e^2}, \qquad \Theta = G\cos i,$$
$$l = l' - \varpi, \qquad g = \varpi - \theta, \qquad \theta = \theta.$$

Le système des six éléments L, G, Θ, l, g, θ détermine, tout aussi bien que le précédent, les coordonnées et la vitesse du point P. En outre *ces six quantités constituent un système de variables canoniques* ([1]).

Les grandes lettres L, G, Θ vont jouer le rôle de ξ_i de la théorie générale; les petites lettres l, g, θ vont jouer le rôle des η_i.

Au point de vue de leur signification physique, on voit que L définit le grand axe de l'orbite, G représente en grandeur le « vecteur des aires », Θ la composante de ce vecteur normale au plan de référence sur lequel on compte l'inclinaison i, θ la longitude du nœud, g l'angle du nœud et du périhélie, l l'anomalie moyenne.

Exprimée au moyen de ce système de variables, la fonction caractéristique F du mouvement non troublé, qui en représente (au signe près) l'énergie totale, a pour valeur

$$F = \frac{m^3(M + m)^2}{2L^2},$$

elle ne dépend que de L (qui va jouer le rôle de ξ_a, tandis que l va jouer le rôle de η_a).

Dans le mouvement non troublé, L, G, Θ, g, θ sont des constantes, l seul est une fonction linéaire du temps

$$l = nt + k,$$

le moyen mouvement n ayant la valeur

$$n = \frac{m^3(M + m)^2}{L^3}.$$

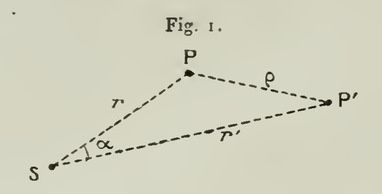
Nous retrouvons bien les propriétés connues du mouvement

([1]) *Voir* sur ce point H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 74 et suiv.

elliptique képlérien. Les six constantes d'intégration arbitraires sont L, G, Θ, g, θ et k.

Examinons maintenant la fonction perturbatrice f du mouvement troublé. Comme nous rapportons ce mouvement troublé au Soleil, nous devons considérer la planète P comme soumise (*fig.* 1),

Fig. 1.



non seulement à la force $\frac{mm'}{\rho^2}$ (dirigée suivant PP′) provenant réellement de la planète P′, mais aussi à une force d'*inertie* qui est le produit de sa masse m par une accélération égale et opposée à celle $\frac{m'}{r'^2}$ (dirigée suivant SP′) que la planète P′ imprime au Soleil. L'ensemble de ces deux forces dérive de la fonction de forces suivante :

$$\varepsilon f = \frac{mm'}{\rho} - mm' \frac{r \cos\alpha}{r'^2}$$

qui est notre fonction perturbatrice.

Dans le calcul de cette fonction perturbatrice, qui est très petite, on peut regarder la planète troublante P′ comme décrivant autour du point S un mouvement képlérien non troublé. Dans ces conditions, les coordonnées du point P′ sont des fonctions périodiques du temps; les coordonnées du point P sont d'ailleurs des fonctions périodiques des trois angles l, g, θ. On peut donc développer la fonction perturbatrice en une série trigonométrique de la forme

$$f = \sum A \cos(\alpha_1 l + \alpha_2 g + \alpha_3 \theta + \beta t + \gamma), \tag{10}$$

les α étant des nombres entiers, les A dépendant de L, G, Θ. Cette forme est identique à la forme (5) du n° 5, et nous nous trouvons exactement dans les conditions d'application de nos formules.

En particulier, le théorème de Lagrange-Poisson nous apprend que L (qui joue le rôle de ξ_a) n'aura pas de perturbation séculaire : c'est la célèbre propriété connue sous le nom d'*invaria-*

bilité du grand axe. Nous voyons aussi que s'il y a un « petit diviseur » (ce qui arrivera si les moyens mouvements des planètes PP′ sont presque commensurables), c'est la longitude moyenne l (qui joue le rôle de η_a) qui subira, de ce chef, les perturbations les plus importantes.

En résumé, on connaîtra entièrement les perturbations, si l'on a su, au préalable, développer la fonction perturbatrice sous la forme trigonométrique (10), opération que nous n'entreprendrons pas ici en détail, nous contentant de signaler sa possibilité.

7. *Mouvement d'un corps céleste autour de son centre de gravité.* — La seconde application que nous ferons sera relative au mouvement d'un astre autour de son centre de gravité. Nous prendrons pour exemple la Terre que nous assimilerons à un ellipsoïde de révolution.

S'il n'existait aucune cause perturbatrice, son mouvement autour de son centre de gravité serait un *mouvement à la Poinsot*, dans lequel l'axe de la Terre décrirait, d'un mouvement uniforme, un cône de révolution autour d'une direction absolument fixe dans l'espace. Il se trouve d'ailleurs que les conditions initiales sont telles que ce cône de révolution est excessivement délié, l'axe de la Terre ne faisant qu'un angle excessivement petit avec l'axe du cône qu'il décrit. Mais c'est là une circonstance initiale qui n'a rien de nécessaire, et l'on pourrait imaginer qu'elle n'est pas réalisée. C'est pourquoi nous prendrons comme mouvement non troublé le mouvement à la Poinsot le plus général.

Les perturbations proviendront de la présence des autres astres (Lune, Soleil) qui exercent sur la Terre *non sphérique* un petit *couple* perturbateur.

Pour l'application de notre méthode, il faut d'abord définir la position et les vitesses de la Terre autour de son centre de gravité par un système de *variables canoniques*. Nous définirons ce système de la façon suivante [1] :

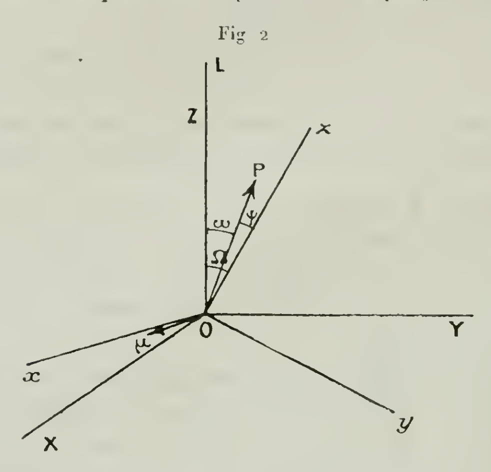
Soient (*fig.* 2) O le centre de gravité de l'ellipsoïde de révolution auquel nous assimilons la Terre, OXYZ trois axes de directions absolument fixes dans l'espace, $Oxyz$ trois axes *mobiles*

[1] C'est le système de variables employé par H. Poincaré dans son *Cours de Mécanique céleste* de la Sorbonne en 1909-1910.

invariablement liés à l'ellipsoïde, Oz étant l'axe de révolution.

Il est clair que l'orientation de ce trièdre $Oxyz$ donnera l'orientation de l'ellipsoïde terrestre, et que ses vitesses seront entièrement définies à chaque instant par les trois projections p, q, r de

Fig. 2



la rotation instantanée sur les axes *mobiles* $Oxyz$, ou bien encore par les trois projections Ap, Aq, Cr, sur ces mêmes axes, du moment cinétique OP (A, A, C représentent les trois moments principaux d'inertie de l'ellipsoïde).

Considérons alors les six quantités suivantes :

G, moment cinétique pris en grandeur (longueur OP);
Φ, projection du moment cinétique OP sur l'axe des z mobile ;
Θ, projection du moment cinétique OP sur l'axe des Z fixe ;
χ, angle des plans POZ et POz ;
φ, angle des plans POz et xOz ;
θ, angle des plans POZ et XOZ.

Il est facile de voir que ces six quantités, qui définissent complètement l'orientation et les vitesses de l'ellipsoïde mobile [1],

---

[1] Les angles ω et ψ sont, en effet, déterminés, puisque

$$\cos\omega = \frac{\Theta}{G}, \qquad \cos\psi = \frac{\Phi}{G};$$

or, il est évident que les cinq angles ω, ψ, χ, φ, θ déterminent complètement l'orientation de l'ellipsoïde. Quant aux vitesses, elles sont aussi déterminées, puisque le vecteur OP = G a, pour projections sur les axes mobiles, Ap, Aq, Cr.

constituent un système de variables canoniques [1]. Les grandes lettres G, Φ, Θ vont jouer le rôle des ξ_i de la théorie générale, les petites lettres χ, φ, θ vont jouer le rôle des η_i.

Exprimons au moyen de ce système de variables la fonction caractéristique F du mouvement non troublé : elle est égale (au signe près) à l'énergie de ce mouvement, qui se réduit à la demi-force vive [2]

$$F = -\frac{1}{2}\left(\frac{G^2}{A} + \frac{A-C}{AC}\Phi^2\right).$$

Elle ne dépend que de G *et* Φ (qui joueront le rôle des ξ_a).

Donc, dans le mouvement non troublé, G, Φ, Θ et θ sont des constantes, χ et φ des fonctions linéaires du temps,

$$\chi = \nu t + k, \qquad \varphi = \nu_1 t + k_1,$$

les vitesses angulaires ν, ν_1 ayant les valeurs

$$\nu = \frac{G}{A}, \qquad \nu_1 = \frac{A-C}{AC}\Phi.$$

---

(1) On peut le voir ainsi : donnons à ces six quantités des accroissements

$$\delta G, \quad \delta\Phi, \quad \delta\Theta, \quad \delta\chi, \quad \delta\varphi, \quad \delta\theta,$$

cela constitue une modification virtuelle de la position et des vitesses du système.

Dans cette modification virtuelle, le *travail des quantités de mouvement* a pour valeur

$$G\,\delta\chi + \Phi\,\delta\varphi + \Theta\,\delta\theta,$$

car les angles ω et ψ ont bien varié de δω et δψ dans cette modification virtuelle, mais ces variations δω et δψ n'amènent aucun travail des quantités de mouvement.

Or lorsque, suivant la méthode classique de Poisson-Hamilton, on adopte pour variables des coordonnées curvilignes q_i et les quantités $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ correspondantes, les quantités q_i, p_i forment, on le sait, un système canonique. Dans une modification virtuelle quelconque δq_i, δp_i de la position et des vitesses du système, l'expression différentielle $\Sigma p_i \delta q_i$ représente, elle aussi, le *travail des quantités de mouvement*.

L'expression

$$G\,\delta\chi + \Phi\,\delta\varphi + \Theta\,\delta\theta - \Sigma p_i \delta q_i = 0$$

est donc une *différentielle exacte*, et cela prouve que les variables G, Φ, Θ, χ, φ, θ, constituent, comme les variables p_i, q_i de Poisson-Hamilton, un système canonique.

(2) La force vive a pour valeur

$$A(p^2+q^2)+Cr^2 = \frac{1}{A}(A^2p^2+A^2q^2+C^2r^2) + \frac{A-C}{AC}C^2r^2 = \frac{G^2}{A} + \frac{A-C}{AC}\Phi^2.$$

Nous retrouvons bien les propriétés connues du mouvement à la Poinsot. Le vecteur OP du moment cinétique est fixe dans l'espace, et l'angle $\psi = \mathrm{PO}z$ est constant; l'axe de révolution $\mathrm{O}z$ tourne autour de l'axe fixe OP d'un mouvement uniforme. Les six constantes d'intégration arbitraire sont G, Φ, Θ, θ, k et k_1.

Nous prévoyons dès maintenant, d'après le théorème de Lagrange-Poisson, que, dans le mouvement troublé, G et Φ (qui jouent le rôle des ξ_a) n'auront pas de perturbations séculaires, l'angle ψ ne variera que très légèrement autour d'une valeur moyenne constante $\left(\cos\psi = \frac{\Phi}{G}\right)$; c'est ce que nous vérifierons rigoureusement dans un instant.

Etudions, à cet effet, la fonction pertubatrice f du mouvement troublé; elle provient de la présence d'astres pertubateurs voisins (Lune, Soleil). Examinons l'influence de la Lune, que nous supposerons placée en L sur l'axe des Z, à une grande distance $\mathrm{OL} = \mathrm{D}$.

Appelons Ω la distance polaire géocentrique de la Lune (angle $\mathrm{ZO}z$), L sa masse (celle de la Terre étant prise pour unité). Le potentiel exercé par la Lune sur tous les éléments de masse dm de la Terre se calcule aisément, il a pour expression, en négligeant le *cube* de la parallaxe lunaire,

$$\mathrm{U} = \mathrm{L}\int \frac{dm}{r} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} - \frac{\mathrm{L}}{2}(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\frac{3\cos^2\Omega - 1}{\mathrm{D}^3}.$$

Le terme $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}$ donne naissance à la force centrale qui attire la Terre vers la Lune; nous pouvons le laisser de côté, puisque cette force centrale n'influe pas sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité O. Il en est de même du terme $\frac{\mathrm{L}}{2}\,\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{D}^3}$ qui ne dépend pas de l'orientation de la Terre, et ne donne par suite non plus aucun couple pertubateur. Le couple pertubateur, égal à $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \Omega}$ en valeur absolue, provient uniquement du terme

$$\varepsilon f = -\frac{3\,\mathrm{L}(\mathrm{C} - \mathrm{A})}{2\,\mathrm{D}^3}\cos^2\Omega$$

qui est notre fonction pertubatrice.

La quantité D, distance de la Terre à la Lune, est une fonction connue du temps; elle ne varie d'ailleurs que lentement, et reste presque constante pendant la durée d'un jour de la rotation

terrestre. Pour simplifier, nous la regarderons comme constante, c'est-à-dire que nous regarderons comme circulaire l'orbite de la Lune. Dans ces conditions, nous prenons comme coefficient perturbateur

$$\varepsilon = -\frac{3\,L(C-A)}{2\,D^3},$$

et nous avons à développer sous la forme trigonométrique (5) la fonction

$$f = \cos^2\Omega.$$

Une formule de trigonométrie sphérique nous donne immédiatement

$$\begin{aligned}\cos\Omega &= \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos\chi\\ &= \frac{\Theta}{G}\frac{\Phi}{G} + \sqrt{1-\frac{\Theta^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos^2\Omega = \frac{\Theta^2\Phi^2}{G^4} &- 2\frac{\Theta\Phi}{G^2}\sqrt{1-\frac{\Theta^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi\\ &- \left(1-\frac{\Theta^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{\Phi^2}{G^2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\chi\right).\end{aligned}$$

Le calcul de la fonction σ est dès lors immédiat, si l'on se rappelle que G, Θ, Φ sont des constantes, et χ une fonction linéaire du temps :

$$\begin{aligned}-\sigma = \int f\,dt = \frac{\Theta^2\Phi^2}{G^4}t &+ 2\frac{\Theta\Phi}{G^2}\sqrt{1-\frac{\Theta^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\frac{A}{G}\sin\chi\\ &+ \left(1-\frac{\Theta^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{\Phi^2}{G^2}\right)\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\frac{A}{2G}\sin 2\chi\right).\end{aligned}$$

Telle est la valeur complètement explicite de la fonction σ, exprimée, comme nous le voulions, au moyen des variables canoniques G, Φ, Θ, χ, φ, θ. Cette expression ne suppose nullement que l'angle ψ est petit, c'est-à-dire qu'elle serait encore valable, même si la Terre tournait autour d'un axe très différent de son axe de révolution.

De cette expression de σ se déduisent immédiatement les perturbations. Tout d'abord, σ ne dépend pas de φ ni de θ : donc Φ et Θ n'ont aucune perturbation, ils restent rigoureusement constants. Ensuite nous avons pour les perturbations de G

$$\delta G = -\varepsilon\frac{d\sigma}{d\chi};$$

nous voyons, comme nous l'avions prévu, qu'elles sont essentiellement périodiques; l'angle $\psi = \arc\cos\frac{\Phi}{G}$ ne subit donc, lui aussi, que des perturbations périodiqnes autour d'une valeur moyenne constante. Il y a plus : la Terre tourne autour d'un axe très voisin de son axe de révolution, et l'angle ψ est très petit, l'observation montre qu'il atteint à peine une demi-seconde. Or $\frac{\partial\sigma}{\partial\chi}$ contient en facteur $\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}} = \sin\psi$. Les perturbations de G, et par suite celles de l'angle ψ lui-même sont donc excessivement petites, et l'on peut légitimement les négliger.

On connaîtra donc à très peu près le mouvement de l'axe de révolution de la Terre Oz, si l'on connaît celui de l'axe OP du moment cinétique. Il suffit donc d'étudier les perturbations de θ, puisque, Θ n'ayant aucune perturbation, $\cos\omega = \frac{\Theta}{G}$ n'a que des perturbations périodiques négligeables. On a

$$\delta\theta = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\Theta} = -\varepsilon\left[\frac{2\Theta\Phi^2}{G^4} - \frac{\Theta}{G^2}\left(1-\frac{\Phi^2}{G^2}\right)\right]t + \ldots,$$

formule où nous ne retenons que les termes séculaires et où nous n'avons pas écrit les termes périodiques. Dans le cas actuel, ces termes périodiques sont négligeables, puisqu'ils contiennent en facteur $\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}} = \sin\psi$, et que l'angle ψ est excessivement petit. Pour la même raison, nous pouvons négliger le second terme séculaire écrit, et dire que tout se passe, en définitive, comme si l'axe OP du moment cinétique (ou, à très peu près, l'axe de la Terre) tournait autour de la droite OZ (ou OL) qui joint la Terre à la Lune avec une vitesse angulaire égale

$$-\varepsilon\frac{2\Theta\Phi^2}{G^4} = \frac{3L(C-A)}{D^3}\frac{\cos\Omega}{G}.$$

Comme la position de la Lune n'est pas fixe, mais lentement variable, il s'agit là d'une vitesse angulaire instantanée autour d'un axe instantané OL connu à chaque instant. Le mouvement absolu de l'axe terrestre peut s'en déduire aisément.

8. Il est très intéressant de rappeler que le problème du mou-

vement d'un astre autour de son centre de gravité peut être traité par une voie entièrement élémentaire, et pour ainsi dire sans aucun calcul. Nous allons donc, en terminant ce paragraphe, reprendre le problème, dès son début, par cette méthode élémentaire, en abandonnant complètement la méthode analytique suivie jusqu'ici. Nous prenons toujours comme exemple le mouvement de l'axe de la Terre, sous l'influence de la Lune et du Soleil, dont nous envisagerons séparément les effets.

Le point fondamental est de montrer que l'angle ψ de l'axe terrestre Oz avec l'axe OP du moment cinétique restera toujours très petit.

Si p, q, r désignent à chaque instant les projections de la rotation instantanée de la Terre sur ses trois axes d'inertie (mobiles) Ox, Oy, Oz, il est bien connu que le vecteur OP a pour projections sur ces axes mobiles

$$Ap, \quad Aq, \quad Cr,$$

et que la force vive de la Terre a pour valeur

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2.$$

Nous voulons montrer que Ap et Aq étant initialement *très petits* par rapport à Cr, le resteront pendant tout le mouvement.

Les actions perturbatrices extérieures se réduisent au couple

$$\frac{\partial U}{\partial \Omega} = \frac{3L(C-A)}{D^3} \cos\Omega \sin\Omega$$

dû à l'astre perturbateur L, couple dont le moment $O\mu$ est perpendiculaire au plan LOz.

Le théorème des moments cinétiques nous apprend que *la vitesse de l'extrémité* P *du vecteur* OP *est équipollente à* $O\mu$.

Cette vitesse *(absolue)* du point P est donc constamment normale à l'axe Oz; d'ailleurs la vitesse *d'entraînement* du point P, due à la rotation (p, q, r), est aussi normale à Oz (car le vecteur p, q, r est évidemment situé dans le plan POz); donc il en est de même de sa vitesse *relative*, dont la projection sur Oz, qui est $\frac{d(Cr)}{dt}$, est par suite nulle. La projection Cr du vecteur OP sur Oz reste donc rigoureusement constante.

Pour ce qui est de Δp et de Δq, observons que la variation de la force vive

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

ne peut provenir que du travail du couple perturbateur, qui est lui-même très petit. Comme Cr^2 est lui-même constant, nous concluons que Δp et Δq resteront toujours petits.

Il s'ensuit, comme nous voulions l'établir, que l'angle ψ reste toujours très petit, et que nous pourrons pratiquement confondre en direction l'axe Oz de la Terre avec l'axe OP du moment cinétique. D'ailleurs la longueur OP du vecteur OP reste pratiquement constante et égale à Cr. *Le mouvement du point* P *sur la sphère de rayon* OP *reproduira donc exactement le mouvement du pôle sur la sphère céleste.* Ce point étant acquis, la simple application du théorème des moments cinétiques va nous donner le mouvement de l'axe terrestre [1].

La vitesse du point P est équipollente au moment $O\mu$ de la force perturbatrice. Ce vecteur $O\mu$ est toujours *dans le plan de l'équateur;* il est perpendiculaire au plan méridien de la Lune et a pour grandeur

$$\frac{3L(C - A)}{D^3}\cos\Omega\sin\Omega;$$

sa direction et sa grandeur sont donc *fonctions périodiques du temps*. Or on sait que, quand un vecteur tourne dans un plan en ayant sa grandeur et sa direction fonctions périodiques du temps, on peut toujours le considérer comme la résultante d'une série de vecteurs *constants en grandeur* et tournant *uniformément* dans ce plan : les périodes de rotation de ces différents vecteurs composants sont la période du vecteur étudié et ses sous-multiples. A

---

(1) Ceci deviendra presque rigoureusement exact si nous appelons *axe terrestre*, non plus l'axe de *revolution* de la Terre, mais son axe instantané de *rotation;* ces deux axes font ensemble un angle $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}$, tandis que l'angle ψ, que fait OP avec l'axe de révolution Oz, a pour valeur $\frac{A\sqrt{p^2+q^2}}{Cr}$; ces deux angles sont presque égaux, et sont d'environ une demi-seconde : leur *différence*, qui est l'angle que fait l'axe intantané de rotation avec l'axe OP du moment cinétique, est à peu près 300 fois plus petite $\left(1 - \frac{A}{C} = \frac{1}{300}\right)$ et est donc tout à fait négligeable.

ces vecteurs tournants, il convient d'ajouter un vecteur *fixe* représentant, en quelque sorte, la moyenne du vecteur ainsi décomposé.

Dans le cas actuel le vecteur fixe produira les perturbations *séculaires*, les vecteurs tournants produiront les perturbations *périodiques*.

Chacune de ces perturbations périodiques pourra être étudiée indépendamment des autres : ayant pour vitesse un vecteur de grandeur constante qui tourne uniformément, elle consiste évidemment en un petit mouvement circulaire du pôle autour de sa position moyenne. On voit donc combien est simple, si on l'envisage séparément, chaque perturbation périodique.

La seule opération à effectuer est la décomposition du vecteur tournant $O\mu$ en une série de vecteurs constants en grandeur et tournant uniformément dans le plan de l'équateur [1]. Nous n'effectuerons pas ici cette décomposition. Contentons-nous de signaler que la principale de ces perturbations périodiques a une période *moitié* de la période de révolution de l'astre troublant : elle consiste en une « nutation » semi-mensuelle pour la perturbation lunaire, semi-annuelle pour la perturbation solaire [2].

Il nous reste à parler des perturbations séculaires, qui sont de beaucoup les plus importantes puisque leurs effets se cumulent. Elles sont dues, nous l'avons dit, au vecteur *fixe* qui représente la moyenne du vecteur $O\mu$. Ce vecteur fixe moyen se trouve être parallèle à la ligne des nœuds, intersection de l'équateur avec le plan de l'orbite de l'astre troublant. La vitesse de déplacement séculaire du pôle P est donc constamment parallèle au plan de l'orbite

---

(1) Une pareille décomposition est bien connue, en électricité, dans l'étude des « champs tournants ».

(2) Remarquons que, dans cette décomposition, certains vecteurs tourneront dans le sens direct (de l'Ouest à l'Est), et produiront pour le pôle un mouvement de sens direct; d'autres tourneront en sens rétrograde (de l'Est à l'Ouest) et produiront pour le pôle un mouvement rétrograde. Il arrivera qu'un vecteur direct et un vecteur rétrograde tourneront avec la même période : les deux mouvements circulaires de sens inverse, qui en résultent pour le pôle, se composeront alors en un mouvement elliptique ayant cette période. C'est ainsi que la « nutation semi-mensuelle », ainsi que la « nutation semi-annuelle », fait décrire au pôle une petite ellipse : comme ordre de grandeur, l'amplitude de ces nutations atteint respectivement un cinquième de seconde et une seconde d'arc environ, en latitude; en longitude, elle est un peu plus grande.

de l'astre troublant. Si donc la Lune était le seul astre troublant, et si son orbite était fixe, nous verrions le pôle terrestre P décrire, sur la sphère céleste, un cercle autour du pôle π_L de l'orbite lunaire, ce cercle ayant pour rayon l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur.

Telle est la perturbation séculaire due à la Lune. Mais il y en a aussi une, due au Soleil : elle consiste en un pareil mouvement circulaire du pôle terrestre P autour du pôle de l'écliptique π_S.

Pour avoir le mouvement séculaire complet du pôle terrestre P, il faut superposer ces deux mouvements séculaires d'origine lunaire et d'origine solaire. Or le pôle π_S de l'écliptique peut bien être regardé comme fixe, mais il n'en est pas de même du pôle π_L de l'orbite lunaire. Un mouvement connu sous le nom de *rétrogradation des nœuds* lui fait décrire autour du point π_S un petit cercle de 5° de rayon en une période de 18 ans et demi environ.

Alors, la combinaison des deux mouvements circulaires autour de π_L et de π_S donne, pour le pôle terrestre P, les deux grandes perturbations connues sous le nom de *précession des équinoxes* et de *nutation de Bradley*. Le pôle terrestre décrit, en gros, un cercle autour de π_S, ce cercle a un rayon de 23° 28′ égal à l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, il est parcouru dans le sens rétrograde en 26000 ans environ : c'est la *précession des équinoxes*. Ce cercle précessionnel est festonné par des ondulations dont la période, 18 ans et demi, est celle de la rétrogradation des nœuds lunaires, et dont l'amplitude (en latitude) est de 18″ environ : *c'est la nutation de Bradley*.

Nous avons donc pu étudier, d'une manière assez complète, le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, par des procédés entièrement élémentaires. Nous allons voir qu'on peut faire de même pour l'étude des perturbations du mouvement képlérien d'une planète.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DUHEM (Pierre). — Études sur Léonard de Vinci. Troisième série : *Les Précurseurs parisiens de Galilée.* 1 vol. gr. in-8° de XIV-605 pages. Paris, Hermann et fils, éditeurs, 1913.

La dédicace du présent Ouvrage marque avec précision le résultat essentiel des érudites recherches de M. Duhem : *Ad majorem gloriam mechanicæ nostræ scientiæ vere genitricis, Facultatis Artium quœ in Universitate Parisiensi* XIV° *sæculo florebat.* Il apparaît en effet très lumineusement, à l'attachante lecture de ce nouveau Volume, que la Science attribuée à Galilée et à son école ne fut que l'application des mathématiques au développement d'une Mécanique dont le Moyen Age chrétien avait posé les principes et formulé les propositions fondamentales, d'une Mécanique « conçue par les physiciens qui professaient à l'Université de Paris au XIVe siècle, en prenant l'observation pour guide », d'une Mécanique qu'ils avaient « substituée à la Dynamique d'Aristote, convaincue d'impuissance à *sauver les phénomènes.* »

La réaction antipéripatéticienne semble avoir eu pour point de départ les condamnations portées en 1277 par l'évêque de Paris, Étienne Tempier, contre nombre de thèses soutenues par « Aristote et ceux de sa suite ». Elle fut facilitée par l'intensité de la vie intellectuelle à cette époque (elle ne peut guère être comparée qu'à notre vie scientifique des trente dernières années), aussi par l'influence considérable des doctrines de l'Université de Paris sur celles des Universités d'Italie, d'Angleterre, d'Espagne, comme cela ressort de l'ensemble du Livre.

La théorie du mouvement des projectiles, léguée par Aristote, fut en particulier l'objet de critiques très vives; elle dut céder la place à une explication nouvelle fondée sur l'hypothèse de l'*impetus.* Or M. Duhem a eu la bonne fortune de découvrir le maître qui, le premier, a mis sous forme précise et didactique une théorie qui sera conservée dans ses grandes lignes pendant les siècles suivants. Cet homme de génie fut Jean Buridan, de Béthune, recteur,

dès 1327, de l'Université de Paris, où il enseigna avec grand succès pendant de nombreuses années. De son œuvre, deux importantes séries de *Questions* (¹) se retrouvent au manuscrit n° 14723 du fonds latin de la Bibliothèque Nationale, réplique, exécutée au xvᵉ siècle, d'une copie faite en 1368. C'est à ce manuscrit que M. Duhem a emprunté une exposition de la *Dynamique de Jean Buridan*, qui occupe, en son Ouvrage, les pages 34 à 53, et dans laquelle il a intercalé tous les textes originaux essentiels, clairement traduits : chapitre achevé de l'histoire de la Mécanique, appelé à devenir classique et à figurer dans une anthologie telle que celle de M. Jouguet.

La question fondamentale est celle-ci : « Le projectile, après qu'il a quitté la main de celui qui le lance, est-il mû par l'air? Sinon, par quoi est-il mû? » Buridan expose les théories d'Aristote et montre, par *diverses expériences*, qu'elles ne fournissent pas de réponse; puis il présente ainsi sa solution : « Tandis que le moteur meut le mobile, il lui imprime un certain *impetus*, une certaine puissance capable de mouvoir ce mobile dans la direction même où le moteur meut le mobile.... Plus grande est la vitesse avec laquelle le moteur meut le mobile, plus puissant est l'*impetus* qu'il imprime en lui. C'est cet *impetus* qui meut la pierre après que celui qui la lance a cessé de la mouvoir; mais, par la résistance de l'air, et aussi par la pesanteur qui incline la pierre à se mouvoir en un sens contraire à celui vers lequel l'*impetus* a puissance de mouvoir, cet *impetus* s'affaiblit continuellement; dès lors, le mouvement de la pierre se ralentit sans cesse; cet *impetus* finit par être vaincu et détruit à tel point que la gravité l'emporte sur lui et, désormais, meut la pierre vers son lieu naturel. »

« On doit, ce me semble, tenir pour cette explication, d'une part, parce que les autres explications se montrent fausses et, d'autre part, parce que tous les phénomènes s'accordent avec cette explication-ci. »

L'*impetus* est d'autant plus grand que la vitesse communiquée au corps est plus grande; à vitesse égale, il est d'autant plus grand

(¹) *Questiones totius libri phisicorum editœ a Magistro Johanne Buridam* (*loc. cit.*, fol. 2-112). — *Questiones super tres primos libros meteororum et super majorem partem quarti a Magistro Jo. Buridam* (*loc. cit.*, fol. 164-259).

que la quantité de *matière* que renferme le corps est plus grande. D'une manière plus précise et en langage moderne, pour Buridan, l'*impetus* est le produit de trois facteurs : une fonction croissante de la vitesse, le volume du corps et la densité de la substance, proportionnelle à sa pesanteur spécifique. De plus, pour étendre sa doctrine aux corps célestes, formés, selon les idées régnantes, de substance immatérielle, Buridan admet l'existence d'une densité, expression d'un attribut plus général que la pesanteur spécifique.

C'est qu'en effet le Philosophe de Béthune n'envisage pas seulement le mouvement des graves. Il dessine les grandes lignes d'une Mécanique céleste, basée sur la loi de l'Inertie, qui s'offre à lui sous cette forme: Quand nul milieu résistant, quand nulle tendance naturelle analogue à la gravité ne s'oppose au mouvement, l'*impetus* conserve une grandeur invariable; le mobile auquel on a communiqué un mouvement de translation ou de rotation continue indéfiniment à se mouvoir avec une vitesse constante.

Pour Buridan, « dès la création du Monde, Dieu a mû les cieux de mouvements identiques à ceux dont ils se meuvent actuellement; il leur a imprimé alors des *impetus* par lesquels ils continuent à être mûs uniformément; ces *impetus*, en effet, ne rencontrant aucune résistance qui leur soit contraire, ne sont jamais ni détruits ni affaiblis.... Selon cette imagination, il n'est pas nécessaire de poser l'existence d'intelligences qui meuvent les corps célestes d'une manière appropriée; bien plus, il n'est pas nécessaire que Dieu les meuve, si ce n'est sous forme d'une influence générale, de cette influence par laquelle nous disons qu'il coopère à tout ce qui est. » (P. 52.)

M. Duhem analyse minutieusemsnt les conceptions de Buridan et en suit l'influence sur Albert de Saxe, sur les maîtres du Collège Montaigu, tels que Jean Dullaert, Louis Coronel, sur ceux des Universités allemandes qui n'étaient que des colonies de l'Université de Paris, sur bien d'autres scolastiques, jusqu'à Léonard de Vinci; il décrit les hostilités des Averroïstes italiens du XVe siècle à l'égard d'une doctrine pour laquelle ils n'eurent qu'un complet mépris, jusqu'au jour où un Benedetti, par exemple, y viendra apporter un important complément. Cette histoire d'un mouvement d'idées dans les Universités du Moyen Age est pleine d'un

intérêt passionnant au point de vue de la Science et de la Culture générales; mais, pour ne pas sortir du cadre de ce *Bulletin*, nous croyons devoir nous limiter à deux grandes œuvres, celles de Nicole Oresme et de Dominique Soto.

Maître Nicole Oresme, grand maître du Collège de Navarre en 1356, mort évêque de Lisieux en 1387, contemporain d'Albert de Saxe, un peu plus jeune que Buridan, a été le précurseur de Copernic, de Descartes et de Galilée. Il a laissé un *Traité de la Sphère* et un *Traité du Ciel et du Monde*, réunis en le manuscrit n° 1083 du fonds français de la Bibliothèque Nationale, et un Traité *De difformitate qualitatum*, dont un bon manuscrit figure au n° 7371 du fonds latin du même établissement.

A la vérité, en ce qui concerne l'explication du mouvement des projectiles, le théorie d'Oresme, tout en offrant avec celle de Buridan de nombreuses analogies, conserve une erreur abandonnée par ce maître; il admet, avec Aristote, que la vitesse d'un projectile continue à croître pendant un certain temps après que ce corps a quitté la main ou l'instrument qui l'a lancé : erreur fâcheuse, s'il en fut, pour le progrès de la Dynamique.

Par contre, la théorie du lieu naturel et la question de la pluralité des mondes amenèrent Oresme à formuler le principe d'une explication nouvelle de la pesanteur, laquelle n'exige plus, comme celle d'Aristote, que « la terre demeure immobile au centre du monde; entourée de ses éléments, dont les plus légers enveloppent les plus lourds, elle peut se mouvoir dans l'espace à la manière d'une planète; et, d'autre part, rien n'empêche que chaque planète ne soit formée par une terre grave qu'environneraient une eau, un air, un feu analogues aux nôtres ». Selon cette opinion, la Terre et les planètes jouent des rôles analogues, et un système astronomique où la Terre est supposée mobile et le ciel des étoiles fixes immobile devient possible. Nicole Oresme donne d'un tel système une exposition ferme et claire, d'une clarté à laquelle n'atteindra pas Copernic.

Nicole Oresme a encore, ainsi que l'avaient déjà signalé Curtze et Cantor, inventé la Géométrie analytique. La représentation des variations de l'intensité d'une qualité l'a amené à l'emploi des graphiques à coordonnées rectangulaires : les coordonnées sont la *longitudo* égale à la variable et la *latitudo* ou *altitudo* égale à la

fonction. Oresme a étudié un certain nombre de représentations graphiques simples; en particulier, la représentation rectiligne l'a conduit à la conception d'une corrélation entre une ligne et une équation. Il a, de plus, étendu à l'espace son mode de représentation, à l'aide de coordonnées rectangulaires à trois dimensions.

Enfin, Nicole Oresme a découvert la loi, communément attribuée à Galilée, suivant laquelle croît, avec le temps, la longueur parcourue par un mobile qu'entraîne un mouvement uniformément varié : il l'a obtenue, en la seconde partie du Traité *De difformitate qualitatum*, par une véritable intégration graphique.

Ces beaux titres scientifiques de Nicole Oresme sont détaillés par M. Duhem aux pages 346-398 de son Ouvrage.

L'œuvre du frère prêcheur Dominique Soto est plus modeste. Il a résumé, en un Traité intitulé *In octo libros physicorum commentarii et quæstiones*, daté de 1545, son enseignement de l'Université de Salamanque, qui ne fut que le reflet de celui de l'Université de Paris où il avait longtemps étudié. Les traces des leçons reçues par Soto à Paris et l'influence réciproque de ses Commentaires sur l'enseignement de l'époque ont été démêlées avec perspicacité, comme il fallait s'y attendre, par M. Duhem. Nous ne signalerons ici qu'un fait capital : Soto a le premier formulé les lois de la chute des graves (*vide* p. 279-286, 290-295, 555-562).

Dominique Soto a eu l'idée d'appliquer la règle de Nicole Oresme rappelée plus haut, donnant l'espace parcouru, en un temps déterminé, par un mobile mû d'un mouvement uniformément varié au mouvement vertical des graves qu'il regarde comme uniformément retardé pendant l'ascension. Il formule alors ce résultat : l'espace parcouru, en un certain temps, par un grave, est le produit de la durée de la chute par la moyenne entre la vitesse initiale et la vitesse finale.

Pour clore cette série d'*Études*, M. Duhem établit que Galilée a été initié à la *Dynamique des Parisiens* par la lecture de la Collection publiée à Paris en 1516 et où Georges Lockert avait réuni des œuvres d'Albert de Saxe, de Témon et de Jean Buridan.

A. Boulanger.

MÉLANGES.

SUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS (*suite et fin*);

Par M. H. VERGNE.

III. — Étude élémentaire des perturbations d'un mouvement képlérien.

9. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'examiner les perturbations du mouvement képlérien d'une planète autour du Soleil, sous l'action des forces perturbatrices exercées par une planète voisine, en nous plaçant à un point de vue entièrement élémentaire, et sans faire appel à aucune notion de Mécanique analytique.

Posons d'abord nettement le problème, et rappelons ce qu'il faut entendre par *forces perturbatrices*.

La planète étudiée P, de masse m, est soumise (*fig.* 3) à l'attraction du Soleil S, de masse M, et à l'attraction de la planète troublante P', de masse m'. Ces forces sont respectivement $\frac{Mm}{r^2}$, dirigée suivant PS, et $\frac{m'm}{\rho^2}$, dirigée suivant PP'.

Fig. 3.

Si nous voulons rapporter le mouvement de la planète P au Soleil, c'est-à-dire si nous voulons regarder le Soleil comme fixe, il faut appliquer au point P une accélération égale et opposée à celle du Soleil : or cette dernière provient des actractions exercées par P et P', elle est la résultante de $\frac{m}{r^2}$ dirigée suivant SP et $\frac{m'}{r'^2}$ dirigée suivant SP'.

L'accélération totale du point P, *dans son mouvement autour du Soleil regardé comme fixe*, est donc la résultante des trois vecteurs

$$\frac{M+m}{r^2} \quad \text{dirigé suivant} \quad PS,$$
$$\frac{m'}{\rho^2} \quad \text{»} \quad PP',$$
$$\frac{m'}{r'^2} \quad \text{»} \quad P'S,$$

et si la masse m du point P est prise pour unité, on peut dire que ces mêmes vecteurs sont les *forces* qui agissent sur le point P.

La première force $\frac{M+m}{r^2}$ est l'attraction que produirait une masse égale à $(M+m)$ placée en S; agissant seule, elle donnerait au point P un mouvement elliptique képlérien que nous appelons *mouvement non troublé* de la planète P.

Les deux autres forces, $\frac{m'}{\rho^2}$ et $\frac{m'}{r'^2}$, sont les *forces pertubatrices;* leur résultante, on le voit, est égale à la *différence géométrique* entre l'accélération $\frac{m'}{\rho^2}$ (dirigée suivant PP') que la planète troublante P' imprime à la planète P, et l'accélération $\frac{m'}{r'^2}$ (dirigée suivant SP') que cette même planète P' imprime au Soleil (¹).

Comme, dans notre analyse, *nous négligerons les carrés et produits des perturbations*, nous pourrons calculer ces forces perturbatrices et leur résultante, comme si la planète P, aussi bien que la planète P', décrivaient leur orbite képlérienne non troublée. *Elles sont donc connues en fonction du temps.*

Notre but est d'étudier les perturbations qu'elles apportent à l'orbite képlérienne de la planète P. Cette orbite képlérienne non troublée est définie par les éléments suivants :

1° Le « moment cinétique » SG (moment de la quantité de mouvement du point P dans son mouvement autour de S). Sa direction détermine complètement le plan de l'orbite (qui lui

(¹) S'il existe plusieurs planètes troublantes, on calculera séparément les forces perturbatrices correspondantes, chacune d'elles n'agissant sur l'orbite de la planète P que par la *différence* (géométrique) des accélérations qu'elle imprime à cette planète et au Soleil.

est perpendiculaire), et définit la ligne des nœuds et l'inclinaison par rapport à un plan de repère fixe (par exemple le plan de l'orbite de la planète troublante P'). Sa grandeur $SG = 2m\sqrt{M+m}\sqrt{a(1-e^2)}$ est égale au double de l'aire balayée par le rayon vecteur dans l'unité de temps.

2° Le demi-grand axe a, l'excentricité e, la longitude du périhélie ϖ, et la longitude moyenne l' (ces deux derniers angles comptés à partir d'une direction origine fixe, telle que la ligne des nœuds par exemple). Ces quatre éléments, une fois connu le plan de l'orbite, déterminent entièrement le mouvement képlérien.

Nous cherchons les perturbations de ces différents éléments.

La simple application du *théorème des moments cinétiques* nous en fournira déjà une partie. Soit $S\mu$ le moment résultant des forces perturbatrices par rapport au point S, il est connu à chaque instant. *La vitesse du point* G *est égale et parallèle à* $S\mu$. On connaît donc les variations du vecteur SG, par suite les variations du plan de l'orbite. Le vecteur $S\mu$ pourra être décomposé en deux autres : l'un $S\mu_1$ dans le plan de l'orbite, l'autre $S\mu_2$ perpendiculaire à ce plan.

Le vecteur $S\mu_1$, qui tourne dans le plan de l'orbite et qui est fonction périodique des anomalies moyennes des deux planètes PP', pourra être considéré comme la résultante d'une série de vecteurs *constants en grandeur* et tournant *uniformément* dans ce plan, auxquels il conviendra d'ajouter un vecteur *fixe* représentant en quelque sorte, la « moyenne » du vecteur $S\mu_1$. Chacun, de ces vecteurs composants pourra être envisagé séparément dans ses effets perturbateurs sur le plan de l'orbite. Le vecteur fixe produira des perturbations *séculaires,* les vecteurs tournants des perturbations *périodiques.* Chacune de ces dernières consistera en un petit mouvement conique *circulaire* de la perpendiculaire SG au plan de l'orbite, qui donnera un petit mouvement alternatif de la ligne des nœuds et de l'inclinaison. Le vecteur fixe pourra lui-même être décomposé en deux, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à la ligne des nœuds; le premier engendrera une variation séculaire de l'inclinaison, le second une variation séculaire de la ligne des nœuds.

On voit donc avec quelle facilité on peut étudier les perturbations du *plan de l'orbite*. La seule opération à effectuer est la décomposition du vecteur $S\mu_1$ en vecteurs tournant uniformément, opération que nous n'entreprendrons pas ici (¹). Contentons-nous de signaler que le vecteur fixe possède une composante parallèle à la ligne des nœuds, produisant un mouvement séculaire *rétrograde* de cette ligne.

Il faut maintenant nous occuper des perturbations du mouvement de la planète P dans le plan même de son orbite.

Tout d'abord, le vecteur $S\mu_2$, dont nous n'avons pas encore parlé, donnera la vitesse de variation de la *grandeur* du vecteur des aires, c'est-à-dire de la quantité $\sqrt{a(1-e^2)}$.

Le théorème des forces vives va maintenant nous donner un autre renseignement *L'énergie* du mouvement képlérien non troublé a pour valeur $-\frac{(M+m)m}{2a}$. Ses variations sont égales au travail de la force perturbatrice, travail qui est connu à chaque instant, puisqu'il est permis de le calculer comme si les deux planètes P, P′ suivaient toutes deux leur orbite non troublée. Nous sommes donc en mesure de calculer les variations du demi-grand axe a, et comme nous connaissons aussi celles de $\sqrt{a(1-e^2)}$, nous pouvons en déduire celles de l'excentricité e.

Il resterait, pour achever l'étude des perturbations, à connaître les variations de la longitude du périhélie ϖ, et de la longitude moyenne l'. Mais il est préférable de reprendre complètement l'étude des perturbations du mouvement de la planète P dans le plan même de son orbite, en cherchant à chaque instant les variations du rayon vecteur et de la longitude (²). C'est le problème qui va maintenant nous occuper.

10. *Cas d'une orbite circulaire*. — Nous examinerons d'abord

(¹) Il pourra arriver que deux vecteurs, tournant en sens inverse, aient même période; les deux mouvements coniques circulaires inverses qui en résulteront pour le vecteur SG se composeront alors en mouvement conique elliptique.

(²) Il sera d'ailleurs très aisé, connaissant ces variations, d'en déduire celles δa, δe, $\delta\varpi$, $\delta l'$ des éléments du mouvement dans le plan de l'orbite, puisqu'elles sont reliées aux précédentes, et à leurs dérivées, par des relations linéaires faciles à écrire.

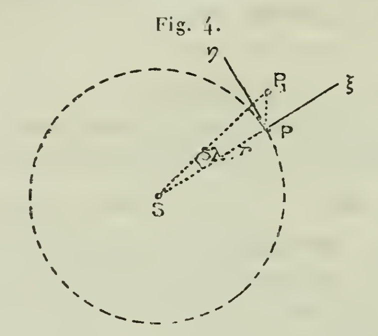
le cas où l'orbite non troublée de la planète étudiée P est circulaire : son excentricité e est nulle, son rayon vecteur r est égal à une constante a, sa vitesse angulaire ω est égale au moyen mouvement n, constant également, et lié à a par la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = \mathrm{M} + m.$$

Nous ne supposons rien sur l'orbite de la planète troublante P' qui, elle, peut avoir une excentricité e' quelconque.

Nous rapporterons le mouvement troublé (*fig.* 4) à des axes

Fig. 4.



tournants Pξ, Pη, choisis de la façon suivante. Leur origine P sera la position *non troublée* de la planète P; l'axe des ξ sera le prolongement du rayon vecteur non troublé, l'axe des η lui sera perpendiculaire. Si donc P_1 représente la position vraie de la planète troublée, les coordonnées ξ, η de ce point P_1 fourniront les perturbations cherchées δr, $\delta\lambda$, du rayon vecteur r et de la longitude λ. On aura

$$\xi = \delta r, \qquad \eta = r\,\delta\lambda,$$

si, comme nous le supposons dans tout ce qui va suivre, on peut négliger les carrés et produits des perturbations ξ, η.

Écrivons maintenant les équations de mouvement de la planète P_1 (dont la masse m est supposée égale à l'unité pour simplifier les écritures). Elle est soumise aux forces suivantes :

1° Force centrale $\dfrac{\mathrm{M}+m}{(r+\delta r)^2}$ émanée du point S et dirigée suivant $\mathrm{P}_1\mathrm{S}$; elle a pour projections :

$$\text{sur P}\xi, \quad -\frac{\mathrm{M}+m}{r^2} + 2\frac{(\mathrm{M}+m)}{r^3}\xi;$$

$$\text{sur P}\eta, \quad -\frac{(\mathrm{M}+m)}{r^2}\frac{\eta}{r}.$$

2° Forces perturbatrices, dont nous appellerons $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, les projections de la résultante sur les axes $P\xi$, $P\eta$. Cette résultante, nous l'avons dit, est égale à la différence géométrique des accélérations que la planète troublante P' imprime à P et à S, et l'on peut la considérer comme connue en fonction du temps.

Mais les axes $P\xi$, $P\eta$ auxquels nous rapportons le mouvement du point P_1 sont *mobiles*. Il y a donc lieu d'ajouter, aux forces précédentes, les *forces d'inertie* qui sont :

3° Force centrifuge, égale et opposée à l'accélération du point coïncidant avec P_1 ; ses projections sont :

$$\text{sur } P\xi, \quad n^2(r+\xi);$$
$$\text{sur } P\eta, \quad n^2\eta.$$

4° Force centrifuge composée, égale et opposée au vecteur de Coriolis ; ses projections sont :

$$\text{sur } P\xi, \quad 2n\eta';$$
$$\text{sur } P\eta, \quad -2n\xi'.$$

Les équations de mouvement du point P_1 sont donc

$$\xi'' = -\frac{M+m}{r^2} + 2\frac{M+m}{r^3}\xi + n^2(r+\xi) + 2n\eta' + \mathfrak{X},$$
$$\eta'' = \quad - \frac{M+m}{r^3}\eta + n^2\eta \quad - 2n\xi' + \mathfrak{Y}.$$

Et, comme on a (troisième loi de Képler)

$$n^2 r^3 = M + m,$$

il vient finalement, pour déterminer les perturbations ξ, η, les équations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' = \mathfrak{X}, \\ \eta'' \qquad\quad + 2n\xi' = \mathfrak{Y}. \end{cases}$$

Ce sont des équations *linéaires*, à coefficients *constants*, dont les « seconds membres » sont des fonctions connues du temps

Pour les intégrer, nous remarquerons que le vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est un *vecteur tournant* dans le plan de l'orbite; la grandeur et la direction de ce vecteur sont évidemment fonctions périodiques des longitudes moyennes des deux planètes P et P'. On peut donc considérer ce vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ comme la résultante d'une série

de vecteurs *constants en grandeur* et tournant *uniformément* dans le plan de l'orbite, auxquels il conviendra d'ajouter un vecteur *fixe*, représentant en quelque sorte la « moyenne » du vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Chacun de ces vecteurs composants pourra être envisagé séparément dans ses effets perturbateurs [puisque les équations (1) sont linéaires]. Le vecteur fixe donnera lieu aux perturbations *séculaires*, les vecteurs tournants engendreront les perturbations périodiques.

Comme les équations (I) sont linéaires, nous pourrons, pour chaque perturbation, nous contenter de prendre une solution *particulière* des équations *avec seconds membres*, quitte à superposer à ces solutions particulières la solution générale des mêmes équations *sans seconds membres*.

Nous commencerons donc par étudier ces équations sans seconds membres. Nous étudierons ensuite les perturbations séculaires et périodiques.

11. *Forces perturbatrices nulles.* — Annuler les seconds membres des équations (I), c'est chercher les perturbations ξ, η, qui correspondent à une force perturbatrice identiquement nulle. En d'autres termes, c'est étudier les orbites képlériennes de la planète P qui sont infiniment voisines de l'orbite circulaire dont on part. Les équations

$$\begin{aligned} &\xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' = 0, \\ &\eta'' \qquad\quad + 2n\xi' = 0, \end{aligned}$$

sont du second ordre, à deux inconnues. Leur intégrale générale doit comporter quatre constantes arbitraires.

1° On peut prendre

$$\begin{aligned} \xi &= -\ \ ae\cos(nt-\alpha), \\ \eta &= \ \ 2ae\sin(nt-\alpha), \end{aligned}$$

avec deux constantes e et α (a désigne toujours le rayon de l'orbite circulaire). Cela revient à donner à l'orbite une légère ellipticité, ayant e pour excentricité et α pour longitude du périhélie.

2° On peut prendre pour ξ et η' deux constantes arbitraires satisfaisant à la relation

$$3n^2\xi + 2n\eta' = 0.$$

Cela revient, conservant l'orbite circulaire, à augmenter le rayon de ξ et le moyen mouvement de $\frac{\eta'}{r}$, *la troisième loi de Képler restant toujours vérifiée.*

3° On peut prendre enfin $\xi = 0$ avec $\eta = \text{const.}$, ce qui revient à faire tourner l'orbite autour du centre S; si l'orbite est légèrement elliptique, cela revient encore à changer la longitude du périhélie.

12. *Perturbations séculaires.* — Étudions maintenant les solutions particulières des équations (I) avec seconds membres, qui correspondent à de véritables perturbations.

Les perturbations séculaires sont dues à un vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *fixe;* nous examinerons successivement l'effet de chacune de ses composantes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$.

1° Force radiale constante $\mathfrak{X}$; les équations

$$\begin{aligned} \xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' &= \mathfrak{X}, \\ \eta'' \qquad\qquad + 2n\xi' &= 0, \end{aligned}$$

admettent la solution

$$\xi = 0, \qquad \eta' = -\frac{\mathfrak{X}}{2n}.$$

Ainsi une force perturbatrice radiale constante ne donne aucune perturbation du rayon vecteur ($\xi = \delta r = 0$), mais donne une modification de $-\frac{\mathfrak{X}}{2na}$ au moyen mouvement; la vitesse angulaire est diminuée si la force radiale est centrifuge, augmentée si elle est centripète.

Si l'orbite présente une légère ellipticité, cette modification de la vitesse angulaire se traduit en outre par un mouvement séculaire du périhélie, qui rétrograde si $\mathfrak{X}$ est positif, et qui avance au contraire si $\mathfrak{X}$ est négatif.

2° Force tangentielle constante $\mathfrak{Y}$; les équations

$$\begin{aligned} \xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' &= 0, \\ \eta'' \qquad\qquad + 2n\xi' &= \mathfrak{Y} \end{aligned}$$

admettent la solution

$$\xi = \frac{2\mathfrak{Y}}{n}t, \qquad \eta = \frac{3\mathfrak{Y}}{2}t^2.$$

on voit que le rayon vecteur, ainsi que la vitesse angulaire, varie proportionnellement au temps. La relation

$$3n^2\xi + 2n\eta' = 0$$

montre en outre que la troisième loi de Képler ne cesse pas d'être vérifiée.

Une force tangentielle $\mathcal{T}$ négative (cas d'une résistance de milieu) se traduit donc par une diminution séculaire du rayon de l'orbite, et par une augmentation séculaire du moyen mouvement (on constate même facilement ce fait paradoxal, d'ailleurs bien connu, que la vitesse *linéaire* va en augmentant). Ce serait l'inverse pour une force tangentielle $\mathcal{T}$ positive.

Dans le cas d'une planète troublante P′ décrivant une orbite képlérienne autour du Soleil, la composante tangentielle $\mathcal{T}$ est *nulle*, si bien qu'il n'y a pas de variation séculaire du rayon de l'orbite de la planète troublée P (invariabilité du grand axe).

13. *Perturbations périodiques.* — Chaque perturbation périodique est due à un vecteur tournant *uniformément* dans le plan de l'orbite. Représentons par

$$\mathcal{N} = h\cos(kt - \alpha),$$
$$\mathcal{T} = h\sin(kt - \alpha),$$

les composantes d'un tel vecteur tournant; h, k, α sont trois constantes.

Nous avons à intégrer le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' = h\cos(kt - \alpha), \\ \eta'' \qquad\qquad + 2n\xi' = h\sin(kt - \alpha). \end{cases}$$

Nous en avons immédiatement une solution particulière en prenant

$$\xi = \mathcal{A}\cos(kt - \alpha), \qquad \eta = \mathcal{B}\sin(kt - \alpha),$$

les constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ayant les valeurs

$$\mathcal{A} = \frac{k - 2n}{k(n^2 - k^2)}h, \qquad \mathcal{B} = \frac{2n^2 + (n-k)^2}{k^2(n^2 - k^2)}h.$$

Ainsi, chaque perturbation périodique, rapportée aux axes tournants $P\xi$, $P\eta$, peut être envisagée comme faisant décrire à la posi-

tion vraie de la Planète P_1, une petite ellipse ayant pour centre sa position non troublée P et pour axes le rayon vecteur non troublé et sa perpendiculaire. Ce petit mouvement elliptique a même période $\frac{2\pi}{k}$ et même phase α que le vecteur tournant ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$) qui l'engendre.

On voit combien est simple, si on la considère séparément, chaque perturbation périodique. La seule opération préliminaire à effectuer sera la décomposition de la force perturbatrice totale ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$) en vecteurs tournant *uniformément* dans le plan de l'orbite. Nous n'effectuerons pas ici cette décomposition, nous en verrons plus loin un exemple particulier simple ([1]).

14. Une remarque s'impose ici, au sujet des perturbations périodiques. Si k est très petit (perturbation à très longue période), ou si $n^2 - k^2$ est très petit (période de la force perturbatrice très voisine de la période de révolution de la planète troublée), les coefficients $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ci-dessus prennent de grandes valeurs ; la perturbation correspondante acquiert alors une importance spéciale : nous dirons que cette perturbation est affectée d'un « petit diviseur ».

Examinons enfin le cas où k, ou $n^2 - k^2$, est non plus très petit, mais nul. Tout d'abord si k est nul, nous retombons sur le cas d'une force perturbatrice radiale ou tangentielle constante, cas examiné plus haut. Si maintenant $k = \pm n$, la solution indiquée ne convient plus, et nous allons voir s'introduire des termes *séculaires mixtes*. Nous allons, pour prendre un exemple

---

([1]) Remarquons que, dans cette décomposition, certains vecteurs tourneront dans le sens direct, et produiront pour le point P_1 un mouvement direct; d'autres tourneront dans le sens rétrograde, et produiront un mouvement rétrograde. Il pourra même arriver qu'un vecteur direct et un vecteur rétrograde tournent avec la *même* période; les deux mouvements elliptiques de sens inverse, qui en résulteront pour le point P_1, pourront être composés en un mouvement elliptique unique ayant cette période.

Faisons une autre remarque relative aux équations (1). Ces équations nous montrent qu'on pourra se faire une image de chaque perturbation, en se représentant le mouvement d'un électron repoussé par l'axe des η proportionnellement à la distance (terme $-3n^2\xi$), soumis en outre à un champ électrique tournant (termes des seconds membres), et à un champ magnétique normal au plan de l'orbite (termes $-2n\eta'$, $2n\xi'$, représentant la force électromagnétique).

qui se présentera plus loin, étudier la perturbation produite par un vecteur *alternatif* (¹) de la forme

$$\mathfrak{X} = h\cos(nt-\alpha), \qquad \mathfrak{Y} = 0.$$

Nous devons intégrer les équations

$$\begin{aligned} &\xi'' - 3n^2\xi - 2n\eta' = h\cos(nt-\alpha),\\ &\eta'' \qquad\quad + 2n\xi' = 0. \end{aligned}$$

Or elles admettent la solution particulière

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{h}{2n}\,t\sin(nt-\alpha),\\ \eta &= \frac{h}{n}\,t\cos(nt-\alpha) - \frac{h}{n^2}\sin(nt-\alpha), \end{aligned}$$

qui comporte, on le voit, des termes séculaires mixtes en $t\,{\cos\atop\sin}(nt-\alpha)$.

On peut donner, de ces termes séculaires mixtes, une interprétation intéressante, en les combinant avec la solution suivante des équations sans second membre

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -ae\cos(nt-\alpha),\\ \eta &= 2\,ae\,\sin(nt-\alpha), \end{aligned} \right.$$

solution signalée plus haut et qui consiste à donner à l'orbite une ellipticité ayant e pour excentricité, et α pour longitude du périhélie. Écrivons donc

$$\begin{aligned} \xi &= -ae\cos(nt-\alpha) + \frac{h}{2n}\,t\sin(nt-\alpha),\\ \eta &= 2\,ae\,\sin(nt-\alpha) + \frac{h}{n}\,t\cos(nt-\alpha). \end{aligned}$$

Si $\frac{h}{2an}\,t$ est *petit* vis-à-vis de e, on pourra écrire ces dernières formules ainsi

$$\begin{aligned} \xi &= -ae\cos\left(nt-\alpha+\frac{h}{2nae}\,t\right),\\ \eta &= 2\,ae\,\sin\left(nt-\alpha+\frac{h}{2nae}\,t\right); \end{aligned}$$

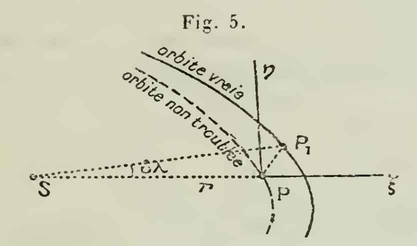
(¹) Un vecteur alternatif peut évidemment être considéré comme la résultante de deux vecteurs tournant en sens inverse.

elles ne diffèrent des formules précédentes (2), qui correspondent au mouvement elliptique ordinaire, que par le changement de α en $\alpha - \frac{h}{2nae}t$. Autrement dit, on peut considérer que la longitude du périhélie, au lieu de rester constante et égale à α, varie linéairement et décroît de $\frac{h}{2nae}t$. La perturbation peut donc être envisagée comme se traduisant par un mouvement séculaire du périhélie qui rétrograde de $\frac{\pi h}{n^2ae}$ à chaque révolution.

15. *Cas d'une orbite elliptique.* — Tout ce qui précède a trait au cas où l'on suppose circulaire l'orbite non troublée de la planète P. Nous allons maintenant supposer à cette orbite une excentricité e non nulle, mais petite, et nous allons examiner quels sont les termes qui s'introduisent de ce chef. Nous nous contenterons ici de retenir ceux qui sont de l'ordre de e, mais rien n'empêcherait évidemment de calculer de même ceux en $e^2, e^3, \ldots$.

Nous allons encore (*fig.* 5) prendre pour axes de référence $P\xi$,

Fig. 5.



$P\eta$ des axes tournants, dont l'origine P sera la position de la planète non troublée, l'axe des ξ étant toujours le prolongement du rayon vecteur, l'axe des η lui étant perpendiculaire. Si P_1 représente la position vraie de la planète dans son mouvement troublé, les coordonnées ξ, η de ce point P_1 fourniront les perturbations δr, $\delta\lambda$ du rayon vecteur et de la longitude, et l'on aura encore

$$\xi = \delta r, \qquad \eta = r\,\delta\lambda.$$

Seulement, ici, le rayon vecteur r non troublé n'est plus constant, non plus que la vitesse angulaire ω de rotation des axes : on a

$$r = a[1 - e\cos(nt - \varpi) + \ldots],$$
$$\omega = n[1 + 2e\cos(nt - \varpi) + \ldots],$$

a, n, et ϖ désignant le demi-grand axe, le moyen mouvement et la longitude du périhélie de l'orbite non troublée, qui, eux, sont des constantes.

Nous pouvons maintenant écrire les équations de mouvement du point P_1. Ce point est soumis aux forces suivantes :

1° Force centrale $\frac{M+m}{(r+\delta r)^2}$ émanée du point S et dirigée suivant $P_1 S$; ses projections sont :

$$\text{sur } P\xi, \qquad -\frac{M+m}{r^2}+\frac{2(M+m)}{r^3}\xi;$$

$$\text{sur } P\eta, \qquad -\frac{M+m}{r^2}\frac{\eta}{r}.$$

2° Forces perturbatrices dont nous appelons toujours $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ les projections de la résultante sur les axes $P\xi$, $P\eta$.

A ces forces, il y a lieu d'ajouter les forces d'inertie qui s'introduisent du fait que les axes de référence sont mobiles ; ces forces d'inertie sont :

3° Force centrifuge, égale et opposée à l'accélération du point coïncidant avec P_1 ; ses projections sont :

$$\text{sur } P\xi, \qquad -r''+\omega^2(r+\xi)+\omega'\eta;$$

$$\text{sur } P\eta, \qquad \omega^2\eta-\omega'\xi.$$

4° Force centrifuge composée dont les projections sont :

$$\text{sur } P\xi, \qquad 2\omega\eta';$$

$$\text{sur } P\eta, \qquad -2\omega\xi'.$$

Il vient donc les équations de mouvement

$$\xi''=-\frac{M+m}{r^2}+2\frac{M+m}{r^3}\xi-r''+\omega^2(r+\xi)+\omega'\eta+2\omega\eta'+\mathfrak{X},$$

$$\eta''=\qquad -\frac{M+m}{r^3}\eta \qquad +\omega^2\eta-\omega'\xi-2\omega\xi'+\mathfrak{Y}.$$

Mais comme on a, dans le mouvement non troublé,

$$-\frac{M+m}{r^2}-r''+\omega^2 r=0,$$

ces équations deviennent

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \xi'' - \left(3\omega^2 - \dfrac{2r''}{r}\right)\xi - 2\omega\eta' - \omega'\eta = \mathfrak{X}, \\ \eta'' \qquad\qquad - \dfrac{r''}{r}\eta + 2\omega\xi' + \omega'\xi = \mathfrak{Y}. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui déterminent les perturbations ξ, η, et qui remplacent, ici, les équations (I) écrites pour le cas de l'orbite circulaire.

Ces équations (II) sont encore linéaires, mais les coefficients ne sont plus *constants;* ils ont pour valeur, développés suivant les puissances de e,

$$-\left(3\omega^2 - 2\frac{r''}{r}\right) = -3n^2\left(1 + \frac{10}{3}e\cos(nt-\varpi) + \ldots\right),$$

$$-\frac{r''}{r} = -en^2\cos(nt-\varpi) + \ldots$$

$$2\omega = 2n[1 + 2e\cos(nt-\varpi) + \ldots],$$

$$\omega' = -2en^2\sin(nt-\varpi) + \ldots.$$

Nous pouvons alors développer aussi les inconnues ξ, η, suivant les puissances de e, sous la forme

$$\xi = \xi_0 + e\xi_1 + \ldots,$$

$$\eta = \eta_0 + e\eta_1 + \ldots,$$

et calculer de proche en proche ξ_0, η_0, puis ξ_1, η_1, ... en identifiant successivement, dans les équations (II), les diverses puissances de e.

Les équations qui donneront ξ_0, η_0 sont exactement les mêmes que les équations (I) écrites pour l'orbite circulaire. On les calculera comme il a été dit pour ce cas, et une fois ξ_0, η_0 connus, il vient, pour déterminer ξ_1, η_1, les équations

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \xi_1'' - 3n^2\xi_1 - 2n\eta_1' \\ \quad = 10n^2\cos(nt-\varpi)\xi_0 + 4n\cos(nt-\varpi)\eta_0' - 2n^2\sin(nt-\varpi)\eta_0, \\ \eta_1'' \qquad\qquad + 2n\xi_1' \\ \quad = \quad n^2\cos(nt-\varpi)\eta_0 - 4n\cos(nt-\varpi)\xi_0' + 2n^2\sin(nt-\varpi)\xi_0, \end{cases}$$

qui sont exactement de même forme que les équations (I), avec les mêmes coefficients constants, et avec des seconds membres

connus. On les intégrera exactement de même, en considérant les seconds membres comme définissant les composantes d'une force perturbatrice qu'on décomposera en vecteurs tournants. Comme ξ_0, η_0 sont (au moins pour les perturbations périodiques) de la forme

$$\xi_0 = \mathcal{A} \cos(kt - \alpha), \qquad \eta_0 = \mathcal{B} \sin(kt - \alpha),$$

nous aurons, aux seconds membres des équations (III), des produits de sinus et de cosinus tels que

$$\frac{\cos}{\sin}(nt - \varpi) \frac{\cos}{\sin}(kt - \alpha),$$

qu'on pourra remplacer par des sommes de sinus et de cosinus dont l'argument aura l'une des formes

$$(kt - \alpha) \pm (nt - \varpi),$$

Tels seront les arguments de nos vecteurs tournants et, par suite, des perturbations correspondantes. Remarquons qu'elles comporteront un « petit diviseur » lorsque $k \pm n$ sera petit, ou voisin de $\pm n$: dans ce cas, la pertubation correspondante acquerra une importance spéciale.

Nous voyons donc comment on pourra, dans l'étude des perturbations, calculer les termes en e. Observons que ces termes en e auront, en quelque sorte, deux origines. D'une part les composantes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de la force perturbatrice comporteront des termes en e, ce qui en introduira dans ξ_0, η_0, eux-mêmes. D'autre part les termes de ξ_0, η_0 indépendants de e, portés dans les seconds membres des équations (III), introduiront d'autres termes en e, qui viendront se superposer aux précédents [1].

---

[1] Au lieu de choisir, comme nous l'avons fait, pour axes de référence $P\xi$, $P\eta$ le rayon vecteur lui-même et sa perpendiculaire, on aurait pu prendre des axes tournant avec une vitesse angulaire *uniforme* égale à n, moyen mouvement non troublé, c'est-à-dire prendre les mêmes axes que ceux adoptés pour l'orbite circulaire. En appelant encore ξ, η les projections de la perturbation PP_1 sur ces axes (le point P ne coïncide plus avec l'origine), on aurait encore écrit

$$\xi = \xi_0 + e\xi_1 + \ldots, \qquad \eta = \eta_0 + e\eta_1 + \ldots;$$

les termes ξ_0, η_0, indépendants de e, se seraient calculés exactement de même. Pour calculer ξ_1, η_1, on aurait obtenu des équations telles que (III), avec les *mêmes* premiers membres, mais avec d'*autres* seconds membres, d'ailleurs connus aussi. La marche à suivre eût été entièrement analogue.

16. Pour résumer tout ce qui précède, nous pouvons dire que nous avons décomposé la perturbation totale en perturbations élémentaires, consistant chacune à faire décrire à la planète une petite ellipse autour de sa position non troublée comme centre. Un tel mouvement elliptique résulte, si l'on veut, de deux mouvements circulaires de sens inverses. Nous sommes donc amenés à envisager la perturbation totale comme un mouvement épicycloïdal composé de la superposition de plusieurs mouvements, circulaires. Comme le mouvement elliptique képlérien non troublé lui-même peut s'envisager comme un tel mouvement épicycloïdal, on voit que nous sommes ramenés à l'antique conception grecque, qui voulait considérer tous les mouvements célestes comme résultant de la combinaison de mouvements circulaires uniformes.

IV. — Application. Mouvement de la Lune.

17. Comme exemple d'application de ce qui précède, nous allons étudier sommairement les principales inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre, sous l'action perturbatrice du Soleil.

Nous supposerons, pour simplifier autant que possible, que le Soleil, la Terre et la Lune, réduits chacun à un point matériel, se meuvent constamment dans un même plan (c'est-à-dire que nous supposerons nulle l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique). Nous supposerons en outre que la masse de la Lune est négligeable par rapport à celle de la Terre, si bien que le centre de gravité de l'ensemble Terre-Lune se confond avec la Terre; enfin que la masse de la Terre est négligeable par rapport à celle du Soleil, si bien que le centre de gravité de l'ensemble Soleil-Terre-Lune se confond avec le Soleil, que nous regarderons comme absolument fixe. Nous ferons abstraction de tous les autres corps du système solaire.

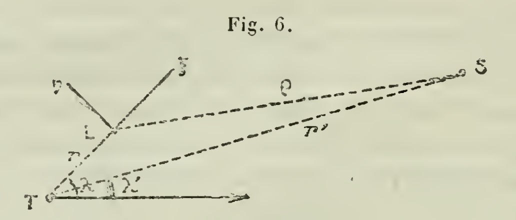
Dans ces conditions, le mouvement de la Terre T sera un mouvement képlérien autour du Soleil fixe S; nous appellerons a', e', $(\varpi' - 180^\circ)$ le demi-grand axe, l'excentricité et la longitude du périhélie de ce mouvement elliptique (1).

(1) En d'autres termes, ϖ' désignera la longitude du *périgée* de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre.

Le mouvement *non troublé* de la Lune L autour de la Terre T sera de même un mouvement képlérien, dont nous appellerons a, e, ϖ, le demi-grand axe, l'excentricité et la longitude du périgée.

Nous allons étudier les perturbations de ce mouvement képlérien de la Lune, en choisissant (*fig.* 6) pour axes $L\xi$, $L\eta$, auxquels nous rapporterons ces perturbations, le rayon vecteur TL et sa perpendiculaire; nous nous trouverons ainsi exactement dans les conditions examinées ci-dessus.

Fig. 6.



Nous devons prendre comme *force perturbatrice*, dont $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ désignent les projections sur $L\xi$, $L\eta$, la *différence géométrique* entre l'accélération $\frac{M}{\rho^2}$ (dirigée suivant LS) que le Soleil imprime à la Lune, et l'accélération $\frac{M}{r'^2}$ (dirigée suivant TS) que le Soleil imprime à la Terre. Nous allons calculer ces projections $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ de la force perturbatrice, en négligeant le carré des excentricités e, e' et le carré du rapport $\frac{a}{a'}$ des distances de la Lune et du Soleil à la Terre (¹).

(¹) M désigne la masse du Soleil. Nous prenons celle de la Lune pour unité. ρ, r, r' désignent les distances mutuelles des trois astres; λ, λ' les longitudes vraies de la Lune et du Soleil. On a les formules connues du mouvement elliptique

$$r = a\,[1 - e\cos(nt - \varpi) + \ldots], \qquad \lambda - \varpi = n\,(t - \tau) + 2e\sin(nt - \varpi) + \ldots$$
$$r' = a'[1 - e'\cos(n't - \varpi') + \ldots], \qquad \lambda' - \varpi' = n'(t - \tau') + 2e'\sin(n't - \varpi') + \ldots,$$

formules où τ, τ' désignent les époques de passage au périgée de la Lune et du Soleil, n et n' les moyens mouvements de ces deux astres.

Comme ordre de grandeur, rappelons qu'on a, en chiffres ronds,

$$e = \frac{1}{20}, \qquad e' = \frac{1}{60}, \qquad \frac{a}{a'} = \frac{1}{400}, \qquad \frac{n'}{n} = \frac{1}{13}.$$

On a

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\lambda - \lambda'),$$

d'où

$$\frac{M}{\rho^2} = \frac{M}{r'^2}\left[1 + 2\frac{r}{r'}\cos(\lambda - \lambda') + \ldots\right].$$

Ce vecteur $\frac{M}{\rho^2}$ est dirigé suivant LS; il a pour projections :

$$\text{sur TS,} \quad \frac{M}{r'^2}\left[1 + 2\frac{r}{r'}\cos(\lambda - \lambda') + \ldots\right],$$

$$\text{sur une perpendiculaire à TS,} \quad -\frac{M}{r'^3} r \sin(\lambda - \lambda') + \ldots.$$

Il faut lui retrancher le vecteur $\frac{M}{r'^2}$ dirigé suivant TS, et le projeter enfin sur $L\xi$ et $L\eta$. Ce qui donne finalement

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= 2\frac{Mr}{r'^3}\cos^2(\lambda - \lambda') - \frac{Mr}{r'^3}\sin^2(\lambda - \lambda') + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\frac{Mr}{r'^3} + \frac{3}{2}\frac{Mr}{r'^3}\cos 2(\lambda - \lambda') + \ldots, \\
\mathfrak{Y} &= -2\frac{Mr}{r'^3}\cos(\lambda - \lambda')\sin(\lambda - \lambda') - \frac{Mr}{r'^3}\sin(\lambda - \lambda')\cos(\lambda - \lambda') + \ldots \\
&= -\frac{3}{2}\frac{Mr}{r'^3}\sin 2(\lambda - \lambda') + \ldots.
\end{aligned}$$

Or nous avons les développements suivants [1] :

$$\frac{r}{r'^3} = \frac{a}{a'^3}[1 - e\cos(nt - \varpi) + 3e'\cos(n't - \varpi') + \ldots],$$

$$\begin{aligned}
\lambda - \lambda' = (n - n')t &+ (\varpi - n\tau - \varpi' + n'\tau') \\
&+ 2e\sin(nt - \varpi) - 2e'\sin(n't - \varpi') + \ldots;
\end{aligned}$$

et, en posant

$$\varpi - n\tau = \varepsilon, \qquad \varpi' - n'\tau' = \varepsilon'$$

(quantités constantes qui sont de l'ordre de e et de e'), nous pouvons écrire (négligeant toujours les carrés et produits de e, e') :

$$\begin{aligned}
\cos 2(\lambda - \lambda') &= \cos 2[(n - n')t + \varepsilon - \varepsilon'] \\
&\quad - [4e\sin(nt - \varpi) - 4e'\sin(n't - \varpi')]\sin 2(n - n')t + \ldots, \\
\sin 2(\lambda - \lambda') &= \sin 2[(n - n')t + \varepsilon - \varepsilon'] \\
&\quad + [4e\sin(nt - \varpi) - 4e'\sin(n't - \varpi')]\cos 2(n - n')t + \ldots.
\end{aligned}$$

---

(1) *Voir* les formules de la Note précédente.

Les produits de sinus et de cosinus peuvent se remplacar par des sommes de sinus et de cosinus : cela introduira des termes trigonométriques dont les arguments seront de l'une des formes

$$2(n-n')t \pm (nt-\varpi), \qquad 2(n-n')t \pm (n't-\varpi');$$

de tous ces termes, nous retiendrons uniquement ici ceux dont l'argument est $(n-2n')\,t+\varpi$, parce qu'ils donnent des perturbations plus importantes que les autres (nous en verrons dans un instant la raison), et nous écrirons

$$\frac{r}{r'^3}\cos 2(\lambda-\lambda') = \frac{a}{a'^3}\left\{\cos 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon'] - \frac{5}{2}e\cos[(n-2n')t+\varpi]+\ldots\right\},$$

$$\frac{r}{r'^3}\sin 2(\lambda-\lambda') = \frac{a}{a'^3}\left\{\sin 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon'] - \frac{5}{2}e\sin[(n-2n')t+\varpi)+\ldots\right\}.$$

Nous pouvons maintenant, comme c'était notre but, développer les composantes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ de la force perturbatrice en séries trigonométriques dont les arguments sont fonctions *linéaires* du temps : il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} = {} & \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3} - \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e\cos(nt-\varpi) + \frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e'\cos(n't-\varpi') \\ & + \frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}\cos 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon'] \\ & - \frac{15}{4}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e\cos[(n-2n')t+\varpi]+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y} = {} & -\frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}\sin 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon'] \\ & + \frac{15}{4}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e\sin[(n-2n')t+\varpi]+\ldots.\end{aligned}$$

Nous avons donc cinq vecteurs perturbateurs que nous envisagerons successivement :

1° Le vecteur

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}, \qquad \mathfrak{Y}_1 = 0$$

est un vecteur *constant* centrifuge (dirigé vers l'extérieur de l'orbite lunaire). Son effet sera de diminuer d'une quantité con-

stante la vitesse angulaire de la Lune sur son orbite, ce qui se traduira en outre par un mouvement séculaire (rétrograde) du périgée.

2° Le vecteur

$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e\cos(nt-\varpi), \qquad \mathfrak{Y}_2 = 0$$

est un vecteur *alternatif* ayant pour période celle même de la révolution de la Lune; il introduira dans les expressions du rayon vecteur et de la longitude de la Lune des termes *séculaires mixtes* de même période dans le détail desquels nous n'entrerons pas. Disons seulement qu'on peut les interpréter, ainsi qu'il a été expliqué à la fin du n° 10, comme produisant un mouvement séculaire (direct) du périgée.

3° Le vecteur

$$\mathfrak{X}_3 = \frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}e'\cos(n't-\varpi'), \qquad \mathfrak{Y}_3 = 0$$

est un vecteur *alternatif* ayant pour période celle de la révolution du Soleil. Il produira sur le rayon vecteur et sur la longitude de la Lune une perturbation de même période, connue sous le nom d'*équation annuelle*. Cette perturbation, bien que de l'ordre de l'excentricité e', est assez importante, parce que sa période (une année) est beaucoup plus longue que la période de révolution de la Lune : en d'autres termes, si nous calculions les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dont il a été question au n° 10, nous trouverions, en dénominateur, le « petit diviseur » n' (le dénominateur de $\mathfrak{B}$ contient même n'^2, la perturbation de la longitude est plus grande que celle du rayon vecteur).

4° Le vecteur

$$\mathfrak{X}_4 = \frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}\cos 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon'],$$

$$\mathfrak{Y}_4 = -\frac{3}{2}\mathrm{M}\frac{a}{a'^3}\sin 2[(n-n')t+\varepsilon-\varepsilon']$$

est un vecteur *tournant* dans le sens rétrograde, dont la période (demi-révolution synodique de la Lune) diffère peu d'un demi-mois. Il produira sur le rayon vecteur et la longitude de la Lune

une perturbation de même période, connue sous le nom de *variation*. Cette « variation » a pour effet de rendre le rayon vecteur plus petit que sa valeur moyenne quand la Lune est en syzygie, plus grand au contraire quand la Lune est en quadrature; par contre, la vitesse angulaire de la Lune est accrue en syzygies, et diminuée en quadratures.

5° Le vecteur

$$\mathfrak{X}_5 = -\frac{15}{4}\,\mathrm{M}\,\frac{a}{a'^3}\,e\cos[(n-2n')t+\varpi],$$

$$\mathfrak{Y}_5 = \frac{15}{4}\,\mathrm{M}\,\frac{a}{a'^3}\,e\sin[(n-2n')t+\varpi]$$

est encore un vecteur *tournant* dans le sens rétrograde. *Sa période diffère peu de celle de la révolution de la Lune* (car $2n'$ est assez petit vis-à-vis de n). Il produira sur le rayon vecteur et la longitude de la Lune une perturbation de même période, qui, bien que de l'ordre de e, est assez importante, précisément parce que sa période est voisine de celle de la révolution de la Lune : en d'autres termes, si nous calculions les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dont il a été question au n° 10, nous trouverions, en dénominateur, le « petit diviseur » $n^2-(n-2n')^2$.

C'est la présence de ce « petit diviseur » qui rend importants les termes dont l'argument est $[(n-2n')t+\varpi]$, et c'est pourquoi nous avons, dans nos développements trigonométriques, laissé de côté les termes d'arguments $2(n-n')t+(nt-\varpi)$ ou $2(n-n')t\pm(n't-\varpi')$, qui ne présentent pas la même particularité. L'ensemble des termes dont l'argument est $[(n-2n')t+\varpi]$ porte le nom d'*évection*.

18. Jusqu'ici, nous avons traité les vecteurs perturbateurs $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1)$, $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2)$, ..., $(\mathfrak{X}_5, \mathfrak{Y}_5)$ comme s'ils agissaient sur une orbite lunaire *circulaire;* en d'autres termes, nous n'avons intégré que les équations (I) à coefficients *constants* du n° 10. Or l'orbite lunaire a une excentricité e, et ce sont les équations (II) à coefficients variables du n° 15, que nous devons intégrer. Cela va introduire de nouveaux termes en e qui viendront se superposer aux précédents, et que nous pouvons calculer en nous servant des équations (III), où ξ_0, η_0 désignent les perturbations que nous venons précisément d'étudier.

Si nous prenons, en premier lieu, les quantités ξ_0, η_0, qui proviennent du vecteur $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1)$, nous aurons entre autres, aux seconds membres des équations (III), un terme d'argument $(nt - \varpi)$, qui introduira des termes *séculaires mixtes* de même espèce que ceux déjà signalés comme provenant du vecteur $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2)$, et qu'on pourra aussi interpréter comme produisant un mouvement séculaire (direct) du périgée.

En second lieu, nous ne tiendrons pas compte des quantités ξ_0, η_0, qui proviennent des vecteurs $(\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{X}_2), (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_3)$ $(\mathfrak{X}_5, \mathfrak{Y}_5)$, parce que ces quantités sont déjà de l'ordre de e ou de e', et leur introduction dans les seconds membres des équations (III) n'amènerait que des termes de l'ordre de e^2 ou de ee', ordre que nous avons convenu de négliger.

En dernier lieu, il nous reste à tenir compte des quantités ξ_0, η_0 provenant du vecteur $(\mathfrak{X}_4, \mathfrak{Y}_4)$. Ces quantités ont pour argument $2[(n - n')t + \varepsilon - \varepsilon']$; introduites dans les seconds membres des équations (III), elles amèneront des termes dont les arguments seront de l'une des formes

$$2[(n - n')t + \varepsilon - \varepsilon'] \pm (nt - \varpi);$$

de ces termes, nous retiendrons seulement ceux d'argument

$$(n - 2n')t + \varpi + \varepsilon - \varepsilon',$$

parce qu'ils donneront des perturbations assez importantes à cause du « petit diviseur » $n^2 - (n - 2n')^2$, ainsi qu'il a été expliqué au sujet du vecteur $(\mathfrak{X}_5, \mathfrak{Y}_5)$. Comme ces termes sont de l'ordre de e, nous pouvons y négliger $\varepsilon - \varepsilon'$ qui est aussi de cet ordre, et dire qu'ils constituent une perturbation d'argument $(n - 2n')t + \varpi$, exactement de même espèce que celle produite par le vecteur $(\mathfrak{X}_5, \mathfrak{Y}_5)$, et s'ajoutant à elle pour donner l'*évection*.

Nous sommes maintenant en possession des principales inégalités du mouvement de la Lune. On pourrait pousser l'approximation plus loin sans rencontrer de difficultés essentielles; il ne s'introduirait que quelques complications de détail.

LA SÉRIE

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\ldots$$

OÙ LES DÉNOMINATEURS SONT « NOMBRES PREMIERS JUMEAUX » EST CONVERGENTE OU FINIE;

Par M. Viggo BRUN.

L'étude du crible Ératosthène a reçu un intérêt nouveau après que l'on eut découvert que les *nombres premiers jumeaux* (1) et les nombres premiers de Goldbach peuvent se déterminer par une méthode analogue à celle d'Ératosthène.

Le premier qui ait attiré l'attention sur ce fait est Jean Merlin, dans un article très intéressant publié par J. H... dans cette Revue (2).

La méthode consiste en un emploi double du crible d'Ératosthène.

Étudions d'abord la méthode d'Ératosthène en lui donnant la forme suivante :

Soient données les séries

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	...	...	x.
0	.	2	.	4	.	6	.	8	.	10	...	...	.
0	.	.	3	.	.	6	.	.	9	..	...	...	.
0	.	.	.	.	5	.	.	.	.	10	...	...	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	..	...	...	.
0	.	.	.	p_n	.	.	.	.	$2p_n$	..	...	λp_n	.

où x désigne un nombre entier et p_n un nombre premier

$$p_n \leqq \sqrt{x} < p_{n+1}$$

et λ un nombre entier

$$\lambda p_n \leqq x < (\lambda+1) p_n.$$

---

(1) C'est-à-dire les couples des nombres premiers ayant la différence 2. *Voir* P. Stäckel, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, Abt. A., Jahrg. 1916, 10 Abh. et Jahrg. 1917, 15 Abh., et 1918, 2 Abh.

(2) 2e série, Tome 39, 1915, 1re Partie. *Voir* aussi Viggo Brun, *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, Kristiania, Bind 34, Hefte 2 et 4; et *Nyt tidsskrift for Mathematik*, 1916.

Les termes de la première ligne, qui sont différents de tous les termes des séries restantes, sont les nombres premiers situés entre $\sqrt{x}$ et x et le nombre 1. Ce sont les termes non effacés du crible d'Ératosthène.

Nous généralisons, en étudiant les séries arithmétiques suivantes :

Δ.	$\Delta + D$.	$\Delta + 2D$.	$\Delta + 3D$.	$\Delta + 4D$.	...
a_1	$a_1 + 2$	$a_1 + 4$	$a_1 + 6$	$a_1 + 8$	...
a_2	$a_2 + 3$	$a_2 + 6$	$a_2 + 9$	$a_2 + 12$	...
..	......	......	......	....	...
a_{r-1}	$a_{r-1} + p_{r-1}$	$a_{r-1} + 2p_{r-1}$	$a_{r-1} + 3p_{r-1}$	$a_{r-1} + 4p_{r-1}$	...
a_r	$a_r + p_r$	$a_r + 2p_r$	$a_r + 3p_r$	$a_r + 4p_r$	...

Les séries s'étendent de 0 à x. D désigne un nombre entier premier avec les nombres premiers 2, 3, 5, ..., p_r. Δ et $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont des nombres entiers

$$0 < \Delta \leqq D, \qquad 0 < a_r \leqq p_r.$$

Nous poserons le problème suivant :

La première ligne, combien contient-elle de termes qui sont différents de tous les termes des lignes restantes ?

Nous désignerons ce nombre par

$$N(D, x, 2, 3, 5, \ldots, p_{r-1}, p_r)$$

en nous souvenant qu'il dépend aussi de Δ et $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Nous obtenons alors la formule fondamentale

$$(1) \quad \begin{aligned} &N(D, x, 2, 3, \ldots, p_{r-1}, p_r) \\ &\quad = N(D, x, 2, 3, \ldots, p_{r-1}) - N(D p_r, x, 2, 3, \ldots, p_{r-1}) \end{aligned}$$

en remarquant que les termes de la dernière série, qui sont identiques aux termes de la première série, appartiennent aussi à une série arithmétique

$$\Delta', \qquad \Delta' + D p_r, \qquad \Delta' + 2D p_r, \qquad \ldots$$

ayant les mêmes propriétés que les autres.

De la formule (1) nous déduirons les suivantes :

$$(2) \quad \begin{aligned} &N(D, x, 2, 3, \ldots, p_r) \\ &\quad = N(D, x) - N(2D, x) - N(3D, x, 2) - N(5D, x, 2, 3) - \ldots \\ &\qquad - N(p_r D, 2, 3, \ldots, p_{r-1}), \end{aligned}$$

et, en choisissant $D = 1$,

$$(3) \begin{cases} N(1, x, 2, 3, \ldots, p_r) = N(1, x) - N(2, x) - N(3, x) - N(5, x) - \ldots - N(p_r, x) \\ \quad + N(3.2, x) + N(5.2, x) + N(5.3, x) + \ldots + N(p_r p_{r-1}, x) \\ \quad - N(5.3.2, x) - N(7.3.2, x) - \ldots - N(p_r p_{r-1} p_{r-2}, x) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad - N(p_{m-1} p_{m-2} \ldots 3.2, x) - \ldots - N(p_r p_{r-1} \ldots p_{r-m+2}, x) \\ \quad + N(p_m p_{m-1} \ldots 3.2, x) + N(p_{m+1} p_m \ldots 3, x, 2) + \ldots \\ \quad\quad + N(p_r p_{r-1} \ldots p_{r-m+1}, x, 2, 3, \ldots, p_{r-m}). \end{cases}$$

où m est un nombre pair.

Ici on peut déterminer les termes de la forme $N(d, x)$ par la formule approchée

$$N(d, x) = \frac{x}{d} + \theta \qquad (-1 \leqq \theta < 1),$$

$N(d, x)$ désignant le nombre des termes de la série arithmétique

$$\Delta, \qquad \Delta + d, \qquad \Delta + 2d, \qquad \ldots, \qquad \Delta + \lambda d,$$

où

$$d \geqq \Delta > 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta + \lambda d \leqq x < \Delta + (\lambda + 1)d.$$

Nous évaluons les termes de la dernière ligne par l'inégalité

$$N(D, x, 2, 3, \ldots, p_r, \ldots, p_n) \leqq N(D, x, 2, 3, \ldots, p_r) \leqq N(D, x),$$

où

$$p_r < p_n.$$

Nous obtenons alors la formule

$$(4) \begin{cases} N(1, x, 2, 3, \ldots, p_r \ldots, p_n) < x \\ \quad \times \Big[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{p_r} \\ \quad\quad + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.2} + \frac{1}{5.3} + \ldots + \frac{1}{p_r p_{r-1}} \\ \quad\quad - \frac{1}{5.3.2} - \frac{1}{7.3.2} - \ldots - \frac{1}{p_r p_{r-1} p_{r-2}} \\ \quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad + \frac{1}{p_m p_{m-1} \ldots 3.2} + \ldots + \frac{1}{p_r p_{r-1} \ldots p_{r-m+1}} \Big] + R, \end{cases}$$

où R désigne le nombre des termes à l'intérieur de la parenthèse

$$R = 1 + r + \binom{r}{2} + \binom{r}{3} + \ldots + \binom{r}{m}.$$

Les nombres m et r sont choisis de manière que

$$m < r < n \qquad \text{où} \qquad p_n \leqq \sqrt{x} < p_{n+1}.$$

D'ailleurs, on peut choisir r et m à souhait. Cela donne à la formule une élasticité que nous n'obtenons pas, quand il s'agit de fixer une limite plus petite que N.

Nous pouvons traiter le crible de Merlin d'une manière tout à fait analogue. Désignons ici le nombre des termes non effacés par

$$P(1, x, 3, 5, \ldots, p_r, \ldots, p_n),$$

après avoir effacé doublement les termes de la forme

$$\Delta + 3\lambda, \quad \Delta + 5\lambda, \quad \ldots, \quad \Delta + p_r\lambda, \quad \ldots, \quad \Delta + p_n\lambda.$$

Nous obtenons alors une formule analogue à (4) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & P(1, x, 3, 5, \ldots, p_r, \ldots, p_n) < x \\ & \quad \times \Big[1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \quad - \ldots - \frac{2}{p_r} \\ & \qquad + \frac{2^2}{5.3} + \frac{2^2}{7.3} \quad + \ldots + \frac{2^2}{p_r p_{r-1}} \\ & \qquad - \frac{2^3}{7.5.3} \quad - \ldots - \frac{2^3}{p_r p_{r-1} p_{r-2}} \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + \frac{2^m}{p_m p_{m-1} \ldots 5.3} + \ldots + \frac{2^m}{p_r p_{r-1} \ldots p_{r-m+1}} \Big] + R, \end{aligned} \right.$$

où

$$R = 1 + 2r + 2^2 \binom{r}{2} + \ldots + 2^m \binom{r}{m} < 1 + 2r + (2r)^2 + \ldots + (2r)^m < (2r)^{m+1}.$$

Nous donnons à cette formule la forme plus courte :

$$(6) \quad P(1, x, 3, 5, \ldots, p_r, \ldots, p_n) < x[1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_m] + R.$$

Étudions d'abord les valeurs Σ.

Σ_1 est égal à la somme des termes de la première des m lignes suivantes :

$$s = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{p_r},$$
$$s = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{p_r},$$
$$s = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{p_r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$s = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{p_r}.$$

Σ_2 est égal à la somme des termes formés par multiplication de chaque terme de la première ligne par les termes de la deuxième ligne ayant des dénominateurs plus petits. Les autres Σ se peuvent définir d'une manière analogue.

Comparons Σ_2 et s^2, et Σ_3 et $s\Sigma_2$:

$$s^2 = 2\Sigma_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{p_r}\right)^2 > 2\Sigma_2,$$
$$s\Sigma_2 = 3\Sigma_3 + \frac{2^3}{3.3.5} + \ldots > 3\Sigma_3.$$

Nous obtenons en général

$$s\Sigma_1 > 2\Sigma_2,$$
$$s\Sigma_2 > 3\Sigma_3,$$
$$s\Sigma_3 > 4\Sigma_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$s\Sigma_{m-1} > m\Sigma_m,$$

d'où

$$s_m > m!\ \Sigma_m$$

ou

$$\Sigma_m < \frac{s^m}{m!}.$$

(*A suivre.*)

ŒUVRES DE G.-H. HALPHEN, publiées par les soins de C. JORDAN, H. POINCARÉ, E. PICARD, avec la collaboration de *C. Vessiot*, t. II. 1 vol. gr. in-8. VII-560 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1918.

Nous sommes heureux d'annoncer l'apparition du Tome II des *Œuvres d'Halphen*. Dans ce Volume sont rassemblés quelques-uns des plus importants travaux de l'illustre mathématicien. Il débute par ses Mémoires sur les caractéristiques des systèmes de coniques, où l'auteur a fait preuve de tant de profondeur dans l'étude des cas où le principe, que Chasles avait admis par induction, se trouve en défaut. Halphen n'abandonne cette question qu'après en avoir trouvé la solution complète et définitive, ce qui, dans beaucoup d'autres circonstances, fut la caractéristique de son talent. Ce Volume contient encore les études sur les points singuliers des courbes algébriques, et le Mémoire trop peu connu sur les lignes singulières des surfaces algébriques.

Les géomètres reliront avec plaisir le Mémoire d'Halphen, qui lui servit de thèse, sur les invariants différentiels, où s'entremêlent si harmonieusement des considérations analytiques et géométriques d'une rare élégance. Plusieurs articles de 1881 se rapportent aux fonctions automorphes se rattachant à la série hypergéométrique; on y trouve un écho de l'impression produite alors dans le monde mathématique par les premiers travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Il n'est pas jusqu'à des Notes de moindre importance sur certains développements en séries, dont les résultats sont surtout négatifs, qui ne montrent la pénétration d'Halphen. Elles pourraient être rapprochées de certains travaux modernes sur les fonctions analytiques.

Le Volume débute par le discours que prononça Hermite aux obsèques d'Halphen, où sont rappelés les principaux événements d'une carrière prématurément interrompue. Ceux qui ont approché le regretté géomètre y retrouveront l'homme simple et modeste, affectueux et bon, dont le souvenir leur est resté cher.

ÉMILE PICARD.

JULIA (GASTON). — MÉMOIRE RELATIF A L'ÉTUDE DES SUBSTITUTIONS RATIONNELLES A UNE VARIABLE (1).

L'Académie avait mis au concours l'étude de l'*itération* d'une substitution, en rappelant que le point de vue *local* avait seul été considéré jusqu'alors et en invitant les concurrents à se placer au point de vue *général*.

Les travaux antérieurs, notamment les travaux fondamentaux de M. Kœnigs, avaient, pour une substitution S, $z_1 = \varphi(z)$, à une variable, conduit à la notion des *points d'attraction* : si ζ est un point laissé fixe par S ou par une de ses puissances (*point invariant*), et si une quantité correspondante, dite *multiplicateur*, est de module *inférieur* à l'unité, les transformés successifs (*conséquents*) d'un point z, pris au voisinage de ζ, tendent tous vers ζ, ou tendent périodiquement vers p points, dont l'un est ζ et dont les autres sont ses $(p-1)$ premiers conséquents.

Ces résultats initiaux soulevaient bien des problèmes : les points attractifs sont-ils en nombre limité ; quel est le domaine exact d'attraction de l'un d'eux ; quelle division du plan est ainsi associée à une fonction $\varphi(z)$ donnée ?

Sur ces questions fondamentales, on ne possédait qu'une Note de M. Fatou (octobre 1906), où l'auteur montrait, sur des exemples, que les régions de la division pouvaient être limitées par des courbes non analytiques, mettant ainsi en évidence les difficultés et la complexité de la question.

Enfin, à un autre point de vue, Poincaré avait établi que, dans certains cas on peut associer à S une fonction méromorphe dans tout le plan, $\theta(u)$, telle que, si l'on pose $z = \theta(u)$, on ait $z_1 = \theta(su)$, s étant une constante de module *supérieur* à 1, ce qui ramène l'étude de l'itération à celle de $\theta(u)$; mais aucune application n'avait été faite de cette méthode d'*itération paramétrique*.

Pour le Concours, trois Mémoires ont été déposés au Secrétariat ; la Commission n'a retenu que celui de M. Lattès, professeur à

(1) Ce Mémoire a obtenu en 1918 le Grand Prix des Sciences mathématiques. L'analyse qu'on va lire constitue le rapport fait à ce sujet par MM. Émile Picard et Georges Humbert (voir *Comptes rendus*, séance du 2 décembre 1918).

l'Université de Toulouse, et celui de M. Julia, lieutenant au 34e régiment d'Infanterie, lauréat du prix Bordin en 1917.

Le travail de M. Lattès est une application des idées de Poincaré et se rattache également à une théorie de M. E. Picard.

M. Lattès établit l'existence de la fonction de Poincaré, pour une substitution *rationnelle* à une variable, dans un cas très étendu, mais sans en tirer aucune conséquence générale pour l'itération; abandonnant alors ce point de vue, il examine les cas particuliers où la fonction de Poincaré étant $\cos u$, $\operatorname{tang} u$ ou pu, l'équation $z_1 = \varphi(z)$ est celle de la *multiplication* de l'une de ces fonctions par un entier, et, chaque fois, il détermine et étudie, par une méthode assez ingénieuse, *l'ensemble* des conséquents d'un point, ainsi que l'ensemble dérivé.

Il aborde ensuite le cas d'une substitution rationnelle entre deux *couples* de variables et montre que, si en un point invariant *l'équation* quadratique *aux multiplicateurs* a ses racines distinctes et de module supérieur à 1, on peut réaliser l'itération paramétrique à l'aide de deux fonctions *méromorphes* de deux variables.

Appliquant ces résultats à une substitution Cremona, il fait voir, du moins dans certains cas, que les conséquents de tout point du plan ont pour limite un point fixe, et que ses antécédents tendent même vers un autre point.

La partie du Mémoire qui concerne les fonctions de deux variables est, sans nul doute, la plus intéressante et la plus nouvelle; elle contient, notamment sur les substitutions Cremona, des résultats élégants, qui, bien que fragmentaires, ouvrent un champ de recherches qui pourra être fécond; l'auteur y a fait preuve d'un esprit habile et sagace et il aurait probablement poussé plus loin ses découvertes si, cette année même, la mort ne l'avait enlevé, jeune encore et en pleine possession de son talent.

Le Mémoire de M. Julia n'étudie que les substitutions rationnelles à une variable; il introduit systématiquement, non plus les points invariants attractifs, mais les points invariants où le module du multiplicateur est *supérieur* à l'unité; leur propriété fondamentale est d'être des *points de répulsion*. D'une manière plus précise, si l'on entoure l'un d'eux d'un domaine arbitrairement petit, les conséquents successifs de ce domaine *finissent* par com-

prendre à leur intérieur tous les points du plan, sauf un ou deux au plus.

L'analogie de cet énoncé avec celui d'un théorème de M. E. Picard n'a rien de mystérieux : la démonstration de M. Julia repose ici, comme souvent dans le reste du Mémoire, sur la belle théorie des *suites normales* de M. Montel, théorie dont on sait le lien étroit avec le théorème de M. Picard.

C'est l'ensemble parfait E′, dérivé de l'ensemble E des points de répulsion, qui joue, dans l'itération, le rôle fondamental : M. Julia étudie ses propriétés, observe qu'il peut être discontinu ou continu linéaire, et que, s'il est superficiel dans une de ses parties, il comprend nécessairement tout le plan.

Le cas le plus intéressant est celui où E′ est linéaire : l'ensemble E′ partage alors le plan en régions D, qui jouissent de cette propriété caractéristique que, si le point z reste dans l'une d'elles, tout point limite pour l'*ensemble* de ses conséquents dépend *analytiquement* de z. De cette proposition et d'une réciproque l'auteur déduit le résultat capital que les points de E′ sont LES *points singuliers essentiels* pour les fonctions limites de la suite $\varphi(z), \varphi[\varphi(z)], \ldots$, et que, si l'on connaît l'*allure* de cette suite quand z reste dans un domaine arbitrairement petit intérieur à D, on connaît, par là même, son allure dans tout D.

La dernière proposition sert de lien entre l'étude locale de l'itération et l'étude générale : un point *attractif*, z_0, appartient à une région D_0, et les conséquents de tout point de D ont z_0 pour limite; D_0 est le domaine de convergence *immédiat* du point attractif.

Une autre conséquence fondamentale est celle-ci, que M. Julia établit par deux méthodes distinctes : *tout domaine immédiat contient au moins un point critique de la fonction algébrique inverse de* $\varphi(z)$, et, comme corollaire, *le nombre des points d'attraction est fini*. C'est la réponse, inattendue peut-être, à une question posée par M. Kœnigs.

M. Julia détermine également le domaine *total* de convergence vers un point attractif, et trouve la condition nécessaire et suffisante pour qu'il se réduise au domaine immédiat; il illustre enfin sa théorie par des exemples habilement choisis : dans la plupart, l'ensemble E′ est une *courbe de Jordan* simple; dans un autre, c'est un continu linéaire fermé, avec des points doubles partout denses

sur lui-même, circonstance singulière que l'auteur éclaire en formant géométriquement, *a priori*, un ensemble continu doué de propriétés analogues.

La dernière partie du Mémoire étudie le cas des points invariants dont le multiplicateur a le module 1, et achève d'établir, en toute généralité, la proposition relative au nombre *fini* des points d'attraction.

Au fur et à mesure de sa recherche, M. Julia avait consigné ces résultats dans des plis cachetés, déposés à l'Académie; postérieurement au dépôt du dernier pli, et en décembre 1917, un géomètre connu, M. Fatou, auquel la théorie de l'itération devait déjà d'intéressants progrès dans une voie nouvelle, énonçait aux *Comptes rendus* la plus grande partie des mêmes résultats, qu'il avait obtenus de son côté et par la même méthode, en utilisant, lui aussi, les propriétés des suites normales de M. Montel : ce n'est pas la première fois, dans l'histoire de la Science, qu'on aura vu deux savants de valeur arriver en même temps, par la même marche, à une même découverte.

Le Mémoire de M. Julia porte la marque d'un esprit mathématique d'ordre élevé, dont la vigueur saisit les problèmes dans leur généralité et poursuit les conséquences jusqu'au bout; il dénote également une connaissance approfondie des résultats et des méthodes de l'Analyse moderne avec une aptitude remarquable à les utiliser. Il réalise, dans la question de l'itération, un progrès décisif et montre à nouveau combien s'introduisent naturellement, dans certaines recherches d'Analyse et dans le domaine rationnel lui-même, les propriétés les plus substiles de la théorie des ensembles et la notions des courbes de M. Jordan.

Aussi, la Commission est-elle d'avis, à l'unanimité, de décerner le Grand Prix des Sciences mathématiques à M. Gaston Julia; elle propose également d'attribuer, au travail de M. Samuel Lattès, une mention très honorable.

BELOT (ÉMILE). — L'ORIGINE DES FORMES DE LA TERRE ET DES PLANÈTES. 1 vol. in-8° (26 × 17) de 214 pages avec figures et planches. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1918.

M. Belot est l'auteur d'une hypothèse cosmogonique dite *tourbillonnaire*, où il fait naître le système solaire de deux masses nébuleuses qui se sont rencontrées. Dans un Ouvrage antérieur, il a développé cette hypothèse et montré comment elle explique notamment les principales caractéristiques de notre système, la formation des nébuleuses spirales, etc.

Dans le volume actuel, où il coordonne et développe une série de Notes présentées à l'Académie des Sciences de 1914 à 1918, il en fait dériver une théorie physique de la formation du relief terrestre.

D'après la cosmogonie tourbillonnaire, le noyau terrestre était une sorte de projectile lancé dans une nébuleuse, suivant la direction nord de l'axe de la Terre. La pression du *vent de la nébuleuse* déprime le projectile en avant de sa trajectoire, l'exhausse en pointe à l'arrière et ralentit la rotation plus dans l'hémisphère boréal que dans l'hémisphère austral : ainsi s'expliquent la forme aplatie de l'océan Arctique, la forme en pointe de l'Antarctide et la torsion de toute l'architecture terrestre australe vers l'Est par rapport aux parties boréales.

La pression du vent de la nébuleuse n'agit sur le noyau encore anhydre que par l'atmosphère primitive, dont le poids, au contact du noyau, devait dépasser 100^{kg} au mètre cube, en raison de l'énorme pression (330^{atm}) exercée par la masse de vapeur d'eau et de gaz. De là deux notions nouvelles : — c'est vers la profondeur de 2500^{m} que s'établit le niveau de base fondamental de l'architecture terrestre (Chap. II) où les vents de surface commencent leur travail intense sur le noyau anhydre; — d'autre part, le frottement de la nébuleuse pendant la période ignée (Chap. III) fait descendre du Nord vers le Sud les hautes couches de l'atmosphère; celles-ci, refroidies, retombent sur l'Antarctide et remontent ensuite vers le Nord, à la surface, fermant ainsi le cycle d'une circulation atmosphérique Nord-Sud. Ainsi, dans la période ignée, les scories silicatées et légères de la

surface sont poussées par les vents vers le Nord, où elles forment la base des soubassements qui portent les continents boréaux.

L'arrivée de l'eau à la surface de la Terre fait l'objet du Chapitre IV : la température s'étant abaissée jusqu'à 364°, température critique de l'eau, la condensation de la vapeur de l'atmosphère peut commencer; et comme elle est entraînée par la circulation atmosphérique, il en résulte un déluge, dans lequel M. Belot distingue d'une part le déluge *critique*, résultant de la pression critique de l'eau (194^{atm}) et imposant à l'atmosphère la chute presque instantanée de 1600^m de hauteur dans les bassins océaniques, et de l'autre le déluge *normal*, qui achèvera de les remplir sur une hauteur de 2000^m. C'est le déluge critique, dont les courants océaniques du Sud au Nord sont très violents, qui sculptera profondément le noyau, tandis que le déluge normal modifiera peu les formes antérieures. Et l'on voit que c'est vers -2000^m (niveau peu différent de -2500^m, niveau de base fondamental) que l'on pourra trouver les lois de l'architecture terrestre (Chap. V).

Ces lois sont de deux genres : les unes *statiques*, dues à l'équilibre du poids du déluge austral autour du centre de gravité de la Terre; les autres *dynamiques* et dues à l'établissement d'un régime permanent des vitesses des courants océaniques du Sud au Nord.

Les lois statiques sont la *loi des antipodes* et la *loi d'égalité entre le poids des Océans et le poids des Terres*, au-dessus du niveau de base fondamental -2500^m. Les lois dynamiques expliquent la forme en pointe vers le sud des continents, presqu'îles et môles archéens, et la distribution des Océans.

Ce déluge austral primitif explique aussi la loi de compensation isostatique.

Dans les Chapitres VI, VII et VIII, M. Belot rattache encore à la physique des fluides les phénomènes orogéniques, épirogéniques, volcaniques et magnétiques. Dans sa théorie du volcanisme naturel, il explique comment des fractures sous-marines et continentales peuvent amener l'eau de mer en vapeur jusqu'à 200^{km} à 300^{km} des côtes; la remontée des laves sur plus de 10^{km} de hauteur n'exige pas une pression correspondante parce que, dans les cheminées volcaniques, elles sont à l'état d'émulsion avec des gaz et des vapeurs.

Le magnétisme terrestre (Chap. VIII) serait un ferro-magnétisme induit, dans la croûte déjà refroidie, par le tourbillon solaire primitif, jouant le rôle d'un solénoïde : on savait, par l'expérience de Wilde, que les Océans agissent sur l'aiguille aimantée comme s'ils étaient plus magnétiques que les continents; l'érosion due au déluge primitif dans les fonds océaniques explique ce fait singulier.

Le Chapitre IX est une étude de planétographie comparée où l'Auteur met en œuvre les résultats acquis par les Chapitres précédents, pour obtenir des données sur les surfaces de la Lune, de Mercure, Vénus et Mars, au point de vue du volcanisme et de l'étendue des continents et des mers.

Dans ses conclusions, M. E. Belot fait prévoir l'avènement d'une Géologie nouvelle, qui sera celle de l'écorce profonde et qui, en dehors de ses méthodes propres, utilisera celles de l'Astronomie, de la Physique, de la Géodésie, etc. ; elle devra reconnaître dans l'ère paléothermale l'existence de phénomènes grandioses et irréversibles, tels que celui du déluge austral primitif, et par suite ne pouvant rentrer dans le cadre de l'actualisme et des cycles géologiques actuels.

G. Bigourdan.

KUGLER (Franz-Xaver), s. j. — Die Babylonische Mondrechnung. *Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne.* Auf Grund mehrerer von *J. N. Strassmaier;* S. J. kopierten Keilinchriften des Britischen Museums. Mit einem Angang über Ghaldaïsche Planetentafeln. 1 vol. in-8 jésus, xv-214 pages. Freiburg im Breisgau, Herder; 1900.

L'Auteur débute par une étude historique sur les périodes de la Lune, d'après les Chaldéens et sur Hipparque. Dans sa Préface, il définit deux ensembles de documents qu'il appelle les systèmes I et II.

La première Partie a trait au parcours de la Lune et au calcul de la nouvelle et de la pleine Lune d'après le système I, au mouvement angulaire quotidien de la Lune (vitesse de la Lune), à la détermination chaldéenne de la plus grande et de la plus petite vitesse de la Lune, à la comparaison des mois synodiques et de ce

qu'il appelle *les mois anomaux*, à la correction des mois synodiques dans le sens du mouvement anomal du Soleil, aux dates de la nouvelle Lune, au calcul de la pleine Lune, à la latitude de la Lune à l'époque des syzygies, à la durée de ce qu'il appelle le *drakonistiche Monat* ou *Dragonmonat*, durée qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la Lune au nœud de l'écliptique, à la durée du mois sidéral, à l'époque du système I, à l'époque de l'activité astronomique d'Hipparque, etc.

Dans la deuxième Partie, l'Auteur s'occupe du parcours du Soleil d'après les systèmes II et I, des longitudes babyloniennes de la nouvelle et de la pleine Lune, donne un schéma du parcours du Soleil d'après le calcul et les données babyloniennes, émet une hypothèse sur une règle d'intercalation astronomique des Babyloniens, calcule la vitesse moyenne du Soleil et la durée de l'année sidérale, et, en particulier, toujours d'après les données babyloniennes, le maximum et le minimum de la vitesse du Soleil sur l'écliptique, étudie la durée de l'année astronomique des Chaldéens, compare l'écliptique fixe babylonien à l'écliptique mobile d'Hipparque.

Il revient au parcours du Soleil d'après le système I, au changement mensuel de la longitude de la Lune, aux longitudes de la nouvelle et de la pleine Lune, à la vitesse moyenne du Soleil et à la durée des jours sidéraux, à la durée de l'année anomale (temps que met le Soleil pour aller de l'apogée au périgée), compare le point de départ de l'année du calendrier romain, et l'écliptique chaldéen, se demande, en passant, si les Babyloniens ont connu la précession des équinoxes.

La troisième Partie a pour objet l'étude du parcours de la Lune et des syzygies d'après le système II. Il y est question du diamètre apparent variable de la Lune, de la méthode chaldéenne pour le calcul de la latitude de la Lune, de données sur le commencement, la durée et la fin des ténèbres, de la vitesse de la Lune, de la durée des mois synodiques sous l'hypothèse que chaque mois le Soleil parcourt 30°, etc.

Il y a une conclusion, puis un supplément relatif au calcul des planètes d'après les Chaldéens. Viennent ensuite des photographies de documents.

R. Le Vavasseur.

KUGLER (FRANZ-XAVER), S. J. — STERNKUNDE UND STERNDIENST IN BABEL. Assyriologische, astronomische und astralmytologische Untersuchungen. I. Buch : *Entwicklung der babylonischen Planetenkunde von ihren Anfängen bis auf Christus.* Mit 24 keilinschriftlichen Beilagen. 1 vol. in-8 jésus, XV-292 pages, 1907. II. Buch : *Natur, Mythus und Geschichte als Grunlagen babylonischer Zeitordnung nebst eingehenden Untersuchungen der älteren Sternkunde und Meteorologie.* I. Teil. Mit zwei Figuren Tafeln. 1 vol. in-8 jésus, XV-200 pages, 1909. II. Teil. I. Heft. 1 vol. in-8 jésus, IV. 201-320 pages, 1912. — Ergänzungen zum ersten und zweiten Buch. I. Teil : I.-VIII. Abhandlung über *Astronomie nebst Astralmythologie und Chronologie der älteren,* Zeit. 1 vol. in-8 jésus, VII-140 pages, 1913. — Münster in Westfalen Aschendorff.

I. BUCH, 1907.

Il s'agit de recherches et d'études sur l'Astronomie dans l'antiquité. Après une Introduction, où l'Auteur analyse le caractère astrologique de l'antique astronomie babylonienne, il divise son Livre en trois Parties. Dans la première Partie, il étudie la désignation et l'ordre des planètes (Lune, Soleil, Jupiter, Vénus, Saturne, Mercure, Mars), leurs noms, leurs trajectoires apparentes; les coordonnées astronomiques; l'orientation d'après les étoiles normales dont il cherche la position dans les 12 constellations du zodiaque; il fait une esquisse de l'école astronomique babylonienne, avec ses 5 planètes (Jupiter, Vénus, Mercure, Saturne et Mars), leurs principales apparitions et leurs positions sur l'écliptique; il s'occupe des grandes périodes des planètes, en particulier comme moyen de détermination des parcours sidéraux et synodiques de chaque planète.

La deuxième Partie a trait à des Tables d'observations et à des éphémérides que l'Auteur interprète et traduit en langage astronomique.

Dans la troisième Partie, il est question des prévisions systématiques des principales apparitions des planètes. L'Auteur étudie d'abord des Tables relatives à Jupiter, les discute et les apprécie, calcule d'après ces Tables les durées des parcours synodiques moyens de Jupiter et tire de l'une de ces Tables trois conséquences importantes relatives aux longitudes de cette planète; l'une

concerne le point zéro (l'origine) de l'écliptique babylonien : l'autre est une comparaison des Tables babyloniennes de Jupiter et de la Lune; enfin, la troisième concerne la position du point vernal dans les Tables babyloniennes.

Il est question ensuite, par exemple, de la durée des plus longs jours, de la détermination babylonienne des équinoxes. Puis l'Auteur étudie des Tables de Saturne, des Tables de Mercure, fait le contrôle des positions données dans les deux Tables, étudie enfin de même des Tables de Vénus.

Il y a un supplément où l'Auteur s'occupe successivement, par exemple, des permutations hypothétiques des noms babyloniens des planètes, des étoiles fixes dont le lever servait à déterminer le début d'un mois, des constellations de l'écliptique.

Suivent un dictionnaire, un index astronomique, puis la reproduction des documents qui ont servi à l'édification du Livre.

II. Buch. — I. Teil. 1909.

L'Auteur s'occupe ici des fondements astronomiques de la chronologie babylonienne, qui offre quelques difficultés à établir d'après le contenu astronomique des textes anciens (en particulier des textes assyriens). L'Auteur aborde ensuite la discussion de la question de la précession. Il s'agit de savoir si la précession des équinoxes était alors connue.

La seconde Partie contient des recherches d'Astronomie historique, une appréciation astronomique astrologique et philologique des œuvres anciennes (assyriennes et babylonienes); elle commence par la solution du problème du « nombre de Platon » [der Platonischen Zahl], son origine prétendue babylonienne, son rapport avec la précession des équinoxes; l'Auteur s'occupe ensuite de la véritable signification de certaines prétendues Tables des longitudes de la Lune; puis de la position de la Lune par rapport au Soleil avant, pendant et après l'opposition; il fait la critique des relations assyriennes et babyloniennes sur les éclipses de Lune et de Soleil, recherche les prédictions d'éclipses de Lune, cite les éclipses de Lune babyloniennes les plus anciennes de l'Almageste, rapporte et explique une relation d'un astronome assyrien à son roi, revient sur les noms babyloniens des planètes,

les noms des étoiles, cite et discute les apparitions de météores, de prétendues transformations d'étoiles, des estimations babyloniennes des distances d'étoiles fixes, aborde les observations météorologiques (arc-en-ciel, halo, parhélie, orages, pluies remarquables). Un supplément est consacré aux observations géologiques, tremblements de terre, éruptions de minéraux, et à diverses autres questions.

L'Auteur étudie ensuite la chronologie babylonienne. Une première Partie envisage le côté religieux, elle a trait aux classes hiérarchiques des anciens souverains babyloniens, à la royauté et aux prêtres, au caractère divin des rois. Une deuxième Partie a pour objet le calendrier, les diverses manières de compter l'année, les noms des mois, leur suite, le nombre de jours contenu dans chaque mois, le commencement de l'année économique, la manière de dater, la position des mois intercalaires (Schaltmonats), la détermination de plusieurs années intercalaires (bissextiles?), le commencement et la durée des mois, l'année des affaires (année commerciale, Geschäftsjahr), etc.

II. Buch. — II. Teil. — I. Heft, 1912.

Dans ce Livre, l'Auteur revient à la chronologie, à la fixation rigoureuse de l'ordre des mois, et à celle des mois intercalaires; puis il s'occupe de la chronologie sous la première dynastie de Babylone, qui comprend onze rois; du commencecment de l'année, des noms des mois, de leur ordre, du nombre de jours qu'ils contiennent; démontre qu'il n'existait pas de règle d'intercalation (Schaltregel), et indique la durée moyenne de chaque mois. Il revient sur l'époque de la première dynastie de Babylone à propos de la plus ancienne Table de Vénus, il discute l'époque des observations de Vénus contenues dans certains documents qu'il appelle A et B, et qu'il étudie avec grands détails, vérifie la détermination qu'il a faite plus haut de l'époque de la première dynastie, donne les durées des règnes de ses onze rois, etc. Un supplément a trait aux mesures babyloniennes des distances des étoiles fixes au temps de la première dynastie.

Ergänzungen zum ersten und zweiten Buch.
I. TEIL. I-VIII, 1913.

Il s'agit d'abord de l'ancienne topographie babylonienne des étoiles du ciel, c'est-à-dire d'une nouvelle détermination des constellations babyloniennes dans leurs rapports les unes avec les autres et avec le Soleil, des levers des astres, de leurs culminations, de la manière dont les Babyloniens groupaient les étoiles. Puis l'Auteur revient sur les mesures babyloniennes des distances des étoiles fixes; il s'occupe d'un relevé schématique des apparitions de la Lune, donne la véritable signification de prétendues Tables de longitude de la Lune, critique les plus récentes recherches destinées à démontrer une astronomie très développée dans l'antique Babylone, le nombre des jours de chaque mois d'après Weidner, la prétendue exactitude de la détermination de l'équinoxe de printemps à l'époque babylonienne ancienne, et indique les preuves de l'absence d'une astronomie scientifique avant le VIIIe siècle de l'ère chrétienne.

R. LE VAVASSEUR.

KUGLER (F.-X.), S. J. — IM BANNKREIS BABELS. *Panbabylonistische Konstructionen und Religionsgeschichtliche Tatsachen.* Mit 7 Abbildungen. 1 vol. in-8, XX-166 pages. Münster i W., Aschendorff; 1910.

Dans une longue Préface, l'Auteur se défend contre les critiques. Le Livre semble d'ailleurs tout entier consacré à ce but. L'auteur y parle d'abord de la «formule» panbabylonienne de Winckler (orientaliste berlinois), des hypothèses ethnologiques erronées de Wincler, de l'ancien calendrier mexicain et son archétype babylonien, des fêtes de la nouvelle année babylonienne et des jeux de gladiateurs, des saturnales, du carnaval et même du combat de David et de Goliath, des processions en l'honneur de Jupiter (la planète), etc. Viennent ensuite, toujours à propos de Wincler, des considérations sur la division harmonique du monde, les régions célestes de l'eau, de la terre et de l'air, sur la Lune, le Soleil et Vénus dans la mythologie babylonienne, trinité particulièrement importante, sur le rôle des quatre planètes Jupiter,

Mars, Mercure et Saturne, sur les révélations divines astrales, puis sur le calendrier, la précession, l'âge de la Terre, les prétendus changements de noms des planètes, l'harmonie des événements terrestres et célestes, sur Babylone comme la vraie patrie des connaissances astronomiques, et des idées astrologiques et mythologiques des anciens peuples cultivés. Il y a une conclusion où il est question de Louis IX, héros du soleil (roi Soleil) dans le sens babylonien; puis viennent des Notes sur le calendrier mexicain, l'hypothétique âge de la Terre, et enfin un index.

R. Le Vavasseur.

HÖLDER (Otto). — Die Arithmetik in strenger Begründung. Programmabhandlung der philosophischen Fakultät zu Leipzig. 1 vol. in-4, IV-74 pages. Leipzig, B.-G. Teubner; 1914.

Cette brochure est la reproduction de leçons faites à des étudiants. Ces leçons n'ont pas la prétention d'être absolument originales. Cependant, en quelques points, elles diffèrent des Ouvrages publiés précédemment sur le sujet. C'est sur ces points que l'Auteur insiste principalement dans sa brochure, et c'est sur ces points aussi que nous insisterons nous-même dans ce compte rendu.

Une idée générale y préside, à savoir que l'Arithmétique est une science ayant un objet bien déterminé : le nombre ; et non pas une de ces théories générales bâties récemment, relatives à des objets qu'on ne définit pas et à des modes de composition de ces objets (même si l'on appelle ces modes de composition : addition multiplication, etc.) sur lesquels on ne dit qu'une chose, à savoir qu'ils satisfont à certains axiomes ou postulats. L'Arithmétique, dit M. Hölder, préexiste à ces théories, rien que par le fait que dans ces théories on considère des suites d'opérations qui doivent être comptées. C'est, au fond, la thèse que Poincaré a soutenue contre les logisticiens.

Peut-on fonder l'Arithmétique sur la mesure des grandeurs? Oui, il n'y a qu'à reprendre les définitions données dans les cours élémentaires sur les grandeurs dont on a défini l'égalité et l'addi-

tion. Mais il faut : 1° faire bien attention à ne rien céder à l'intuition et accepter les axiomes nécessaires ; 2° montrer que les calculs avec les nombres ainsi définis ne conduisent pas à des contradictions. Cette dernière condition nécessite la construction d'une Arithmétique *pure*, qui, ainsi, ne peut être évitée. Cette Arithmétique pure commence naturellement par la théorie du nombre entier ; c'est cette théorie qui fait l'objet de la seconde Partie de la brochure de M. Hölder. Elle y est traitée de la façon qu'on peut dire classique maintenant, d'après Helmholtz, Grassmann, Stolz, Husserl, etc.

Peut-on, en Arithmétique pure, se borner à la considération du nombre ordinal, comme le dit Grassmann ; ou bien, au contraire, l'introduction du nombre cardinal y est-elle indispensable ?

M. Hölder tient pour la seconde de ces opinions. D'ailleurs, pour lui, l'introduction du nombre cardinal ne nécessite aucun nouveau postulat. La définition du nombre cardinal se donne de la façon suivante : Soit un ensemble d'objets ; on les range dans un certain ordre ; on fait correspondre le premier de ces objets au nombre ordinal 1, le suivant au nombre ordinal 2, etc. (les notions exprimées par les mots *premier* et *suivant* ont été admises dans la définition du nombre ordinal). Le nombre ordinal auquel correspond le dernier objet est le nombre cardinal de ces objets. Reste à montrer que si ces objets étaient rangés dans un ordre différent, on aboutirait au même nombre. Pour démontrer cela, il faut savoir à quoi l'on reconnaîtra que deux collections sont composées des *mêmes* objets, rangés dans un ordre différent. C'est là le nœud de la question. M. Hölder donne la définition ordinaire, à savoir : On dit que deux collections sont composées des mêmes objets si l'on peut établir entre leurs éléments respectifs une correspondance telle qu'à chaque élément de la première corresponde un élément et un seul de la seconde, et qu'à chaque élément de la seconde corresponde un élément et un seul de la première ; deux objets se correspondant ainsi étant dits identiques.

La différence entre les deux théories ne me paraît qu'une affaire de mots. Du moment qu'on définit mathématiquement : 1° le nombre cardinal des objets d'un ensemble ordonné ; 2° ce qu'on appelle deux ensembles composés des mêmes objets, mais

ordonnés différemment, il est bien évident qu'on pourra démontrer que ces deux ensembles ont le même nombre cardinal d'objets. Il est bien certain, d'ailleurs, que la considération d'un tel nombre est utile, même en Arithmétique pure : on en fait usage, par exemple, comme le rappelle M. Hölder, pour démontrer que la suite des chiffres de la réduction en décimales d'une fraction est périodique.

Mais est-ce là le vrai nombre cardinal ? Il semble plutôt que le vrai nombre cardinal s'introduise de la façon suivante : On prend des objets, on les compte comme il vient d'être dit, puis on les met dans un sac, on les brouille, on les sort du sac et on les recompte. Trouvera-t-on le même nombre ?

Si l'on admet qu'il en est ainsi, on peut parler du nombre cardinal de ces objets : mais c'est cela qui est indémontrable mathématiquement, car ce n'est pas un fait mathématique ; et d'ailleurs c'est inutile à l'Arithmétique pure.

L'Auteur donne les définitions des trois premières opérations : addition, soustraction, multiplication, et la démonstration de la commutativité, de l'associativité, etc. Ces démonstrations, faites d'abord pour les nombres ordinaux, sont reprises pour les nombres cardinaux, d'une façon peut-être un peu longue.

La troisième Partie traite des fractions. Elles sont introduites en suivant une idée de Weierstrass, développée par E. Kossack dans un Programmabhandlung publié en 1872.

La quatrième Partie traite des nombres irrationnels. Ils sont définis par une coupure, d'après Dedekind, suivant la méthode bien connue en France depuis l'exposé de J. Tannery.

La cinquième Partie traite des nombres négatifs. Ils sont définis de la façon suivante : On considère des systèmes de deux nombres (positifs) (a, b). Deux systèmes (a, b) et (a', b') sont dits *équivalents* lorsque $a + b' = a' + b$; d'où une forme canonique pour un système, à savoir (m, o) si $a \geqq b$ et (o, m) si $a < b$. Ceci posé, le système (m, o) peut être identifié, comme on le voit facilement, avec le nombre ordinaire positif ou nul m, et le système (o, m) est un nouvel élément qu'on appellera un nombre négatif, et qu'on désignera par $-m$; etc.

Pour tous ces nombres, fractionnaires, irrationnels, négatifs, la théorie est poussée jusqu'au même point que pour les entiers,

c'est-à-dire jusqu'après la démonstration des lois de commutativité, d'associativité, etc., des trois premières opérations.

Enfin la sixième Partie contient des considérations relatives à la mesure d'une grandeur, au changement d'unité, etc.

E. CAHEN.

SANDEN (H. VON). — PRAKTISCHE ANALYSIS. Mit 30 Abbildungen in Text. (*Handbuch der angewandten Mathematik*) herausgegeben von H.-E. TIMERDING. I). 1 vol. in-8, XIX-185 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner; 1914.

L'extraordinaire développement pris, dans la période contemporaine, par les mathématiques pures, a fait de plus en plus sentir le besoin d'extraire de leur domaine, pour les exposer à part, celles de leurs parties que le physicien, le mécanicien, et, plus généralement, le technicien, peuvent avoir à utiliser d'une façon courante et qu'il ne leur est pas toujours facile de discerner de façon suffisamment nette au milieu du riche ensemble de théories que leur offrent les Ouvrages écrits par les purs mathématiciens.

De là, déjà, diverses publications faites à leur intention comme celles qui composent la *Bibliothèque de Mathématiques appliquées*, dirigée par M. d'Ocagne, au sein de l'*Encyclopédie scientifique* qu'a fondée le Dr Toulouse à la librairie Doin.

C'est une collection du même genre que, sous le titre général de *Handbuch der angewandten Mathematik*, vient d'entreprendre la maison Teubner, qui en a confié la direction à M. H.-E. Timerding.

Le premier Volume de cette collection, dû à M. H. von Sanden, privatdozent à l'Université de Göttingen, comprend, sous le titre de *Praktische Analysis*, l'exposé des principales méthodes de calcul numérique ou graphique. Il s'agit toutefois de préciser ce dernier point; les méthodes graphiques envisagées par l'auteur sont celles que l'usage, généralement adopté en France, fait classer dans le *calcul par trait*, c'est-à-dire qui exigent, pour chaque calcul particulier, l'exécution d'une épure spéciale. Quant

aux méthodes graphiques, fondées sur l'emploi de systèmes cotés, figurés de façon permanente sur des nomogrammes, et qui constituent dans leur ensemble la *Nomographie*, l'Auteur n'en donne, au Chapitre I, qu'un très léger aperçu propre seulement à signaler leur existence, se contentant de renvoyer, pour leur détail, aux publications de M. d'Ocagne. Voici, au reste, ce qu'il dit à ce sujet dans sa Préface (p. xvi) : « ... Um den Umfang des Buches möglichst zu beschränken, ist auch die Nomographie, dieses interessante Sonderkapitel der graphischen Methoden, nur flüchtig gestreift. Es steht in den Arbeiten von d'Ocagne hierüber ausreichend Litteratur zur Verfügung. »

Après un premier Chapitre de généralités permettant au lecteur de se faire une idée des ressources dont peut, pour sa besogne, disposer le calculateur moderne, l'Auteur consacre le Chapitre II d'abord aux règles à calcul, dont il esquisse une théorie générale, et plus particulièrement aux règles à échelles logarithmiques qui restent un des instruments les plus courants de la pratique du calcul, puis aux machines à calcul dont (écrivant pour des lecteurs allemands) il se borne à décrire les types les plus répandus en Allemagne : la machine de Burkhardt (où l'on peut reconnaître une sorte de succédanée de celle de Thomas, de Colmar, bien connue chez nous sous le nom d'*Arithmomètre*) et la *Millionnaire*, construite d'après les plans de O. Steiger par la maison Egli, de Zurich, dans laquelle, au moyen d'un dispositif différent, se trouve appliqué l'ingénieux principe imaginé et réalisé pour la première fois par Léon Bollée dans la curieuse machine (œuvre d'un jeune homme alors âgé de 18 ans) qui émerveilla tous les spécialistes à l'Exposition universelle de Paris, en 1889 [1].

Avec le Chapitre III s'ouvre l'étude des fonctions entières et rationnelles. Les calculs qui s'y rapportent sont présentés avec la disposition spéciale due à Horner, d'où dérive un premier procédé de résolution des équations algébriques précisé sur un exemple numérique relatif au cinquième degré. La représentation graphique des fonctions algébriques et entières est ensuite indiquée au moyen de la transformation par l'abscisse due à Segner,

---

[1] *Voir* à ce sujet *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, de M. d'Ocagne, 2e édition, p. 71 et 77.

et la résolution graphique des équations algébriques par la méthode de Lill.

La question, capitale pour les applications techniques, de l'extrapolation et de l'interpolation dans les fonctions algébriques et entières est traitée avec grand soin dans le Chapitre IV, puis reprise au Chapitre V pour les fonctions quelconques avec application à la différentiation et à l'intégration numériques.

Les quadratures mécaniques, y compris la méthode de Gauss, sont sobrement traitées au Chapitre VI. Il s'agit, bien entendu, ici, des intégrations effectuées au moyen des valeurs d'un certain nombre d'ordonnées mesurées sur la courbe représentative de la fonction à intégrer, non des instruments (planimètres, intégromètres, intégraphes) propres à faire connaître les intégrales cherchées par l'intervention de certains mécanismes, instruments pour lesquels l'auteur renvoie aux Ouvrages spéciaux.

L'intégration et la différentiation graphiques font l'objet du Chapitre VII. Sur ce point, l'auteur se borne à faire connaître des tracés expéditifs, suffisants dans la plupart des cas de la pratique, en s'inspirant des travaux de Massau, mais sans pousser l'approximation jusqu'au point que permettent d'atteindre les méthodes du savant belge. Le tracé qu'il indique (p. 95) pour la construction d'un polygone circonscrit à la courbe intégrale est bien, au fond, celui de Massau, à cette différence près qu'il y suppose les centres d'abscisse moyenne simplement déterminés à vue et sans avoir recours aux arcs de cubiques tangents utilisés par Massau.

Le Chapitre VIII, un des plus importants de l'Ouvrage, inspiré des travaux de Runge, est consacré à l'approximation analytique des fonctions empiriques, et notamment à l'Analyse harmonique.

Le Chapitre IX contient un rapide aperçu des méthodes utilisables pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et l'application de la méthode des moindres carrés, et s'étend davantage sur la résolution des équations algébriques par la méthode de Graeff, la méthode d'itération de Newton applicable aux équations transcendantes et son extension aux systèmes d'équations non linéaires.

Les Chapitres X et XI, relatifs à l'intégration numérique et graphique des équations différentielles ordinaires respectivement

du premier ordre et d'ordre supérieur, fournissent un exposé très net en même temps que très succinct des méthodes développées par M. Runge, qui utilisent, en ce qui concerne la partie graphique, la notion des lignes isoclines introduite par Massau.

PH. DU PLESSIS.

MÉLANGES.

LA SÉRIE

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\ldots$$

OU LES DÉNOMINATEURS SONT « NOMBRES PREMIERS JUMEAUX » EST CONVERGENTE OU FINIE

(*suite et fin*);

Par M. VIGGO BRUN.

Écrivons maintenant la formule (6) d'une autre manière :

$$\begin{aligned}P(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < x\,[1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_m - \Sigma_{m+1} + \ldots \pm \Sigma_r] \\ + x\,[\Sigma_{m+1} - \Sigma_{m+2} + \ldots \mp \Sigma_r] + R.\end{aligned}$$

Nous connaissons la valeur de la première parenthèse sous forme de produit. La deuxième parenthèse est composée d'une série de termes décroissants, quand

$$s \leq m.$$

Alors nous pouvons écrire

$$P(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < x\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)+x\,\Sigma_{m+1}+R.$$

De l'inégalité

$$\begin{aligned}-\log\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)\right] \\ = \frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{p_r}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots > s,\end{aligned}$$

où log désigne le logarithme népérien, on déduit

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right) < e^{-s}.$$

D'après la formule de Stirling, on a

$$m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m > \left(\frac{m}{3}\right)^m,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma_{m+1} < \frac{s^{m+1}}{(m+1)!} < \left(\frac{3s}{m+1}\right)^{m+1}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$(9) \qquad \mathrm{P}(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < x\,e^{-s} + x\left(\frac{3s}{m+1}\right)^{m+1} + (2r)^{m+1}.$$

Choisissons maintenant les nombres m et r d'une manière convenable, en prenant garde que les conditions suivantes soient remplies :

$$s < m < r < n \qquad (p_n \leq \sqrt{x} < p_{n+1}).$$

C'est toujours le cas pour $x > x_0$, x_0 étant un nombre déterminable, quand nous choisissons m et r de manière que

$$x^{\frac{1}{30\log\log x}} < 2r < x^{\frac{1}{24\log\log x}},$$

$$12\log\log x < m+1 < 18\log\log x,$$

car, d'après une formule de Mertens, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}s &= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{p_r}\\ &= \log\log p_r - 0,23\ldots + \theta\left(\frac{4}{\log(p_r+1)} + \frac{2}{p_r\log p_r}\right) \qquad (-1<\theta<1),\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\log\log p_r - 1 < \frac{s}{2} < \log\log p_r$$

pour tous les $p_r > p_0$, où p_0 est un nombre déterminable.

Nous pouvons alors donner à la formule (9) la forme suivante :

$$\mathrm{P}(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < x\,\frac{e^2}{(\log p_r)^2} + x\left(\frac{6\log\log p_r}{12\log\log x}\right)^{12\log\log x} + x^{\frac{18\log\log x}{24\log\log x}}$$

ou

$$P(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < \frac{8x}{(\log 2x)^2} + \frac{x}{4^{6 \log\log x}} + x^{\frac{3}{4}},$$

ou

$$P(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < \frac{7200x}{(\log x)^2} (\log\log x)^2 + \frac{x}{(\log x)^6} + x^{\frac{3}{4}}.$$

Nous pouvons alors déterminer un nombre k tellement grand que

$$(10) \qquad P(1, x, 3, 5, \ldots, p_n) < \frac{kx}{(\log x)^2} (\log\log x)^2$$

pour tous les nombres $x > 3$.

Désignons par $Z(x)$ le nombre des nombres premiers jumeaux au-dessous de x. Ces nombres sont déterminables en employant le crible de Merlin parmi les nombres impairs. D'après la formule (10), nous obtenons alors

$$(11) \qquad Z(x) < \frac{kx}{(\log x)^2} (\log\log x)^2,$$

où k désigne une constante déterminable.

Étudions maintenant le théorème de Goldbach. Nous supposons que le nombre $2x$ peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers de $G(2x)$ manières. Nous employons le même crible. L'effacement double des termes de la forme $\Delta + p_r\lambda$ se réduit pourtant à un effacement unique, si x est divisible par p_r. Alors s n'est plus le même que plus haut, quelques-uns des nominateurs étant 1 au lieu de 2.

Soit

$$x = p_{a_1}^{\alpha} p_{a_2}^{\beta} \ldots p_{a_\nu}^{\gamma}.$$

Nous obtenons alors la somme nouvelle

$$s' = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{1}{p_{a_1}} + \ldots + \frac{2}{p_r}$$
$$= s - \left(\frac{1}{p_{a_1}} + \frac{1}{p_{a_2}} + \ldots + \frac{1}{p_{a_\nu}}\right) \geqq s - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_\nu}\right),$$

d'où

$$s' > 2 ll\, p_r - ll\, p_\nu - c,$$

c étant une constante.

Les deux dernières grandeurs de la formule (9) deviennent plus

petites qu'auparavant. Alors nous pouvons les conserver sans changer. Par contre, la grandeur $x e^{-s}$ sera remplacée par $x e^{-s'}$, où

$$x e^{-s'} < \frac{x e^{c}}{(\log p_r)^2} \log p_\nu.$$

Mais, d'après une formule de Tchebycheff, nous savons que

$$x = p_{a_1}^{\alpha} p_{a_2}^{\beta} \ldots p_{a_\nu}^{\gamma} > 2.3.5 \ldots p_\nu > e^{d p_\nu},$$

où d désigne une constante déterminable.

Nous obtenons alors

$$p_\nu < \frac{\log x}{d}$$

ou

$$\log p_\nu < f \log \log x,$$

f étant une constante, pour tous les $x > 3$.

On en déduit que

$$\text{(12)} \qquad G(2x) < \frac{h x}{(\log x)^2} (\log \log x)^3,$$

h étant une constante déterminable.

Une conséquence immédiate de la formule (12) est que

$$\lim_{x=\infty} \frac{G(2x)}{\Pi(2x)} = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport entre le nombre des décompositions goldbachiennes de $2x$ et le nombre des nombres premiers au-dessous de $2x$ a pour limite 0 quand x tend vers ∞.

Enfin, nous étudierons la somme des nombres premiers jumeaux inverses. Nous nous servirons d'une méthode connue ([1]), d'après laquelle nous aurons

$$\text{(13)} \qquad Z(n) + Z\left(\frac{n}{2}\right) + Z\left(\frac{n}{3}\right) + Z\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots + Z\left(\frac{n}{\lambda}\right)$$
$$= \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] + \left[\frac{n}{11}\right] + \left[\frac{n}{13}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p_\mu}\right],$$

où $[a]$ désigne le plus grand nombre entier non supérieur à a.

([1]) Voir par exemple : GRAM, *Det kangelige danske Videnskabernes selskabs skrifter* 6 rakke, 2 bind, p. 218.

On déduit facilement la formule (13) quand on dessine l'hyperbole $y = \frac{n}{x}$. On suppose les deux séries continues aussi loin que possible, c'est-à-dire jusqu'à

$$\lambda = \left[\frac{n}{5}\right] \qquad \text{et} \qquad p_\mu < n < p_{\mu+1},$$

p_μ étant un nombre premier jumeau.

Nous savons que

$$2[a] > a \qquad \text{pour} \qquad [a] \geqq 1$$

et, d'après la formule (11), que

$$Z(n) < \frac{kn}{(\log n)^2}(\log\log n)^2 = \varphi(n),$$

d'où l'on tire que

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{p_\mu}\right)$$
$$< \varphi(n) + \varphi\left(\frac{n}{2}\right) + \varphi\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n}{t}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right).$$

Mais puisque $\varphi\left(\frac{n}{t}\right)$ est une fonction décroissante de t, nous avons

$$\varphi\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n}{t}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right) < \int_1^\lambda \varphi\left(\frac{n}{t}\right) dt$$
$$= kn\left[\frac{\left(\log\log\frac{n}{t}\right)^2 + 2\log\log\frac{n}{t} + 2}{\log\frac{n}{t}}\right]_{t=1}^{t=\left[\frac{n}{5}\right]},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{p}$$
$$< 2k\left[\frac{(\log\log 5)^2 + 2\log\log 5 + 2}{\log 5} - \frac{(\log\log p)^2 + 2\log\log p + 2}{\log p} + \right].$$

Nous en déduisons que la série

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \ldots$$

est convergente ou finie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

I. BOUDIN (E.-J.). — LEÇONS DE CALCUL DES PROBABILITÉS faites à l'Université de Gand de 1846 à 1890, publiées avec des Notes et des Additions par PAUL MANSION, professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, etc. Gand, Maison d'éditions et d'impressions, anciennement Hoste et Cie; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. In-8° de XVI-334 pages.

II. MANSION (PAUL). — CALCUL DES PROBABILITÉS, *sa portée objective et ses principes*. Ibidem, 1916. In-8° de 88 pages.

III. MANSION (PAUL). — SUR LA PORTÉE OBJECTIVE DU CALCUL DES PROBABILITÉS. Ibidem, 1916. In-8° de 32 pages.

IV. MANSION (PAUL). — L'AVANTAGE DU BANQUIER AU JEU DE BACCARA, 1912. In-12 de 8 pages.

I. (Extrait de la Préface.) E.-J. Boudin (1820-1893) a publié quatre fois ses *Leçons sur le Calcul des probabilités*, par la voie de l'autographie (1865, 1874, 1886, 1889; environ 130 pages in-4°), uniquement pour les élèves de l'Université de Gand. Il n'a jamais voulu les faire arriver à un public plus étendu par la voie de l'impression : il trouvait trop peu développé l'important Chapitre consacré aux moyennes dans la seconde Partie de l'Ouvrage et le temps lui a toujours manqué pour y faire les additions qu'il aurait voulu y introduire.

Ces *Leçons*, sous le rapport des principes et de l'ordre des matières, sont supérieures aux meilleurs Manuels sur le même sujet. Elles sont imprégnées des idées de Laplace et de Poisson, avec les correctifs nécessaires au point de vue philosophique empruntés à Cournot et à Hagen.

La nouvelle édition des *Leçons* accentue le caractère subjectif ou objectif des résultats du Calcul des probabilités et en rajeunit toute la partie analytique, en enfermant entre des limites précises toutes les probabilités calculées quand il s'agit de grands nombres.

INTRODUCTION. — Probabilité morale; elle est mesurée par la probabilité mathématique (démonstration de Laplace). *Addition I:*

Démonstration de Poisson. *Note I :* Définition de la probabilité mathématique, due à Peano; probabilité totale, probabilité composée. *Note II :* Démonstration de la formule de Stirling; limites nouvelles de Γ (*n*); quotient de deux produits de fonctions gamma. *Note III :* Intégrale de Laplace enfermée entre deux limites précises.

Première Partie. — Chap. I : Probabilité d'un événement simple. *Addition II :* Probabilité continue. Définition précise permettant d'expliquer le célèbre paradoxe de Bertrand. — Chap. II : Probabilité d'un événement composé. — Chap. III : Probabilité d'un événement qui peut arriver de plusieurs manières. Le problème de l'aiguille est minutieusement rattaché aux principes et résolu par la méthode directe. puis par l'ingénieuse méthode de Barbier. — Chap. IV : Des épreuves répétées. Comme application nouvelle. un curieux problème de Peirce est résolu de cinq manières différentes; puis viennent trois additions et une note. *Addition III:* Probabilité des épreuves répétées où la probabilité des événements simples varie à chaque épreuve. *Addition IV:* Forme donnée par Laplace à la probabilité P d'un événement qui arrive au moins *m* fois en μ épreuves. Démonstration simple de l'équivalence des trois formules de Laplace. Valeur approchée de P en intégrale définie, obtenue par l'emploi de la formule de Stirling. *Note IV:* Méthode de la Vallée Poussin qui trouve autrement, et sans employer la formule de Stirling, une valeur plus approchée de P. *Addition V:* Théorème de Poisson sur l'invariabilité de la probabilité d'un événement futur. lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications soustractives inconnues. Ce théorème est extrêmement utile pour calculer l'avantage du banquier dans certains jeux où une partie se compose d'un grand nombre de coups successifs, le trente et quarante, le baccara, etc.

Le Chapitre suivant. consacré au théorème de Bernoulli et à la loi des grands nombres, renferme, de plus que les anciennes éditions des *Leçons*, une démonstration complète de ces deux propositions sous deux formes différentes, non seulement comme théorèmes asymptotiques pour un nombre infini, mais aussi pour un nombre fini d'épreuves; de plus, on indique comment la loi des grands nombres peut se déduire rigoureusement du théorème

de Bernoulli. Ces résultats constituent la partie centrale de la nouvelle édition des *Leçons*. La *Note V* se rattache à ce Chapitre : il y est prouvé que les courbes de probabilités binomiales ne peuvent être considérées comme symétriques par rapport à leur ordonnée maxima.

Les Chapitres VI et VII traitent des probabilités incertaines, de la probabilité des causes et des événements futurs déduits des événements observés. *Addition VI:* Application de la loi des grands nombres à l'étude objective de ces questions. *Notes VI* et *VII :* Démonstration de résultats approximatifs trouvés par Poisson, mais insuffisamment démontrés par lui. Les formules finales manquent d'élégance, sauf pour le théorème inverse de Bernoulli, mais elles sont vraiment prouvées.

Seconde Partie. — La seconde Partie de *Leçons* de Boudin traite des applications générales du Calcul des probabilités : les jeux (espérance mathématique et espérance morale); probabilités de la vie humaine, rentes viagères et assurances; théorie des moyennes et théorie des erreurs.

Les additions introduites dans le texte sont les suivantes, outre diverses modifications de pure analyse : 1° Problème de la ruine du joueur quand il joue gros jeu contre un adversaire extrêmement riche. 2° Application de la loi des grands nombres à la question de la ruine du joueur. 3° Méthode d'Euler, première méthode de Bertillon pour le calcul des Tables de survie : formule de Makeham. 4° Calcul de la quotité de vie par kilomètre carré et du coefficient de vitalité d'une nation. 5° Détermination de la précision des observations dans le cas où il y a plusieurs paramètres.

Les notes et additions en dehors du texte sont les suivantes : *Addition VII :* Comparaison de la méthode des moindres carrés aux deux méthodes de Laplace. Méthode la plus sûre : réduire toutes les équations données à la forme $x = a$. — Chapitre supplémentaire : Théorie purement algébrique des moindres carrés; la détermination des poids des observations n'a pas de valeur objective. *Note VIII :* Calcul de l'avantage du banquier au jeu de baccara. *Note IX :* Démonstration simple du théorème de Laplace relatif aux moyennes. *Note X :* Notice historique et critique sur la théorie des erreurs : De Tilly et Bertrand ont prouvé qu'au fond

Legendre, Laplace, Gauss, Hagen admettent la même loi de probabilité des erreurs accidentelles.

Les *Leçons* de Boudin se terminent par une collection de problèmes et par trois Tables numériques (valeurs de l'intégrale de Laplace, Tables de survie et de population pour la Belgique). Ces Tables sont corrigées et mises à jour. Les solutions des problèmes ont été ajoutées au texte primitif des *Leçons*, partiellement d'après des notes de Boudin. Quelques-uns de ces problèmes sont très difficiles. Dans un problème supplémentaire, il y a une solution nouvelle due à M. A. Demoulin, de la question dite de Makeham.

L'Appendice sur la portée objective du Calcul des probabilités est une seconde édition d'un Discours prononcé en 1903, à l'Académie royale de Belgique, avec quelques notes bibliographiques nouvelles importantes.

Un Index alphabétique et une Table des matières terminent l'Ouvrage.

II. Extrait de l'Ouvrage précédent, dont il constitue la partie la plus originale et la plus difficile. Il contient les Notes I, II, III, VIII, IX, X (partiellement), les Additions II, IV (partiellement), la démonstration complète du théorème de Bernoulli, puis l'Appendice.

III. Appendice extrait de I et II. Conclusions : 1. Le calcul des probabilités a pour objet des événements qui sont soumis à une loi complexe, résultante d'une loi principale, d'après laquelle certains rapports numériques sont constants, et de lois perturbatrices secondaires donnant naissance à de faibles variations de ces rapports. Dans l'étude de pareils événements, on peut regarder comme légitimes les résultats déduits de la loi des grands nombres, par exemple, à la statistique morale, aux jeux de hasard, à l'évolutionisme ; mais non aux jugements en matière civile ou criminelle, ni à la probabilité des causes. 2. Principe de l'accumulation des probabilités indépendantes de Newman. Ce principe, qui ne peut être traduit en formule, sauf sous une forme symbolique où entre une fonction inconnue, est la source parfaitement légitime de nos certitudes pratiques, dans les sciences qui reposent en dernière analyse sur le témoignage, sciences de la nature, sciences historiques.

IV. Cet Opuscule est devenu la Note VIII des *Leçons*. En voici la conclusion : Le banquier, au jeu de baccara, n'est qu'un fripon avoué, un voleur, et le ponte, un sot, une dupe dont on est convenu de ne pas se moquer.

DUHEM (P.). — Le Système du Monde. Histoire des Doctrines cosmologiques de Platon à Copernic, t. V. 1 vol. grand in-8, de 596 pages. Paris, A. Hermann et fils; 1917.

Les trois derniers Chapitres du Tome IV du monumental Ouvrage du très regretté professeur de la Faculté des Sciences de Bordeaux [1] appartiennent à la troisième Partie, c'est-à-dire à celle dont le titre est *La crue de l'Aristotélisme*. Il en est de même des dix Chapitres dont se compose le Tome V. Je ne peux pas dire si le sujet sera épuisé avec ce volume. Les thèmes traités dans ces nouveaux Chapitres résultent de leurs titres, qu'il est bon de rapporter ici :

IV. Avicébron. — V. Scot Érigène et Avicébron. — VI. La Kabbale. — VII. Moïse Maïmonide et ses disciples. — VIII. Les premières infiltrations de l'Aristotélisme dans la Scolastique latine. — IX. Guillaume d'Auvergne, Alexandre de Hales et Robert Grosse-Teste. — X. Les questions de Maître Roger Bacon. — XI. Albert le Grand. — XII. Saint Thomas d'Aquin. — XIII. Siger de Brabant.

Les noms que nous rencontrons dans les pages que nous avons sous les yeux en grande partie n'appartiennent pas à des savants de profession, mais à des théologiens ou des philosophes qui ont été conduits, peut-être à contre-cœur, à s'occuper de la géométrie et de la mécanique de l'univers. Par conséquent, bon nombre des

---

[1] *Voir* ce *Bulletin* 2e série t. XLI, 1re Partie, p. 231-235. Nous nous permettons une petite remarque comme addition à ce compte rendu. Jacopo Dondi, dont parle M. Duhem (t. IV, p. 292, de son Ouvrage), est auteur d'un autre travail qui a déjà été publié; *voir* en effet P. Revelli, *Il trattato della marea di Jacopo Dondi*. Introduzione-Testo latino-Versione italiana-Appendice (*Rivista geografica italiana*, anno XIX, 1912).

pages écrites par M. Duhem ne doivent pas être analysées dans une Revue, dans un Bulletin destiné aux seuls mathématiciens. Toutefois, ceux qui aiment à suivre l'évolution de la pensée scientifique à travers les siècles trouveront ici et là dans le Volume que nous signalons des données et des recherches bien dignes de fixer l'attention : je vais le prouver par quelques exemples.

On a dit que les rabbins qui se sont voués à la Kabbale ont admis les hypothèses d'Aristarque de Samos. M. Duhem s'efforce de prouver qu'il n'en est rien, car dans les astres et dans les cieux ils n'ont cherché que des symboles propres à figurer leurs doctrines théologiques et mystiques, et les formes vagues de leur langage poétique ont seules permis qu'on les prît pour des précurseurs de Copernic.

Lévi ben Gerson, que M. Duhem avait auparavant un peu délaissé (*voir* ce *Bulletin*, t. XL, p. 281), est étudié à fond dans le Volume que nous analysons. Malheureusement l'*opus magnum*, au point de vue astronomique, de ce savant existe seulement dans l'original, de manière que les conclusions auxquelles arrive M. Duhem ont pour base, non une étude directe de cette grande source, mais des résumés, dont le principal est fourni par Ernest Renan, qui n'était nullement mathématicien. Il s'ensuit que, entre l'appréciation extrêmement flatteuse du mérite de Lévi donnée par plusieurs historiens, dont le plus récent est M. Garlebach, et le jugement assez sévère de M. Duhem, il est possible qu'on trouve un compromis, lorsqu'on sera en possession d'un texte complet accessible même à ceux qui ne connaissent pas la langue de Moïse; aujourd'hui et jusqu'alors la question doit se déclarer encore *sub judice*. D'autres recherches de l'histoire que nous analysons se rapportent au célèbre Witelo, qui occupe une place marquée dans l'histoire de l'Optique pour son Ouvrage *Perspectivæ libri decem;* à ce savant on a attribué un *Liber de Intelligentis;* M. Duhem prouve par de solides arguments que cette attribution est inadmissible.

Dans le Volume qui nous occupe, on rencontre encore Roger Bacon pour ses « Questions sur la Physique et la Métaphysique », Saint Thomas d'Aquin pour ses « Méditations relatives à la matière et aux moteurs des cieux », et encore bon nombre d'autres personnes qui, au cours du Moyen Age, s'efforcèrent de concilier

les dogmes chrétiens avec les conclusions auxquelles était arrivée la science païenne. Alors l'humanité n'était nullement plongée dans une invincible torpeur intellectuelle. M. Duhem a le grand mérite d'avoir mis tout cela sous les yeux de ceux qui, rebutés par la lecture de terribles *in-folio*, préféraient proclamer parfaitement inutile de faire de lourdes investigations pour modifier une opinion qui paraissait au-dessus de toute discussion. Malheureusement le tableau qui nous est offert n'est pas achevé, car la mort cruelle a fait tomber le pinceau de la main robuste qui le maniait en maître consommé.

GINO LORIA.

FRENET (F.). — RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL, septième édition, avec un *Appendice*, par H. LAURENT, et un *Formulaire concernant les fonctions elliptiques*, par R. de MONTESSUS DE BALLORE. 1 vol. gr. in-8, XIV-556 pages et 30 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1917.

L'éloge du Livre excellent qui, depuis 60 ans, contribue dans une large mesure à la formation scientifique de nos étudiants, n'est plus à faire. Nous croyons, malgré cela, devoir consacrer quelques lignes à cette nouvelle édition, qui accentue l'effort que s'était imposé H. Laurent pour introduire les fonctions elliptiques dès le début des études d'enseignement supérieur.

Le calcul intégral a été inventé pour résoudre des problèmes pratiques, pour calculer des aires, des longueurs, des volumes, des travaux de force; mais aux premiers pas que l'on fait dans ce calcul on se heurte à un obstacle : l'intégration de différentielles très simples, qui ne peut se faire qu'avec les fonctions elliptiques. Pourquoi renvoyer à plus tard cette étude?

Le Livre de MM. Appell et Lacour a ouvert la voie. Comme l'aspect de toute question est multiple, à son tour, M. de Montessus a pu, dans un Ouvrage récent, à l'usage lui aussi des débutants, exposer la question en faisant preuve, dans ce domaine, d'une personnalité que notre collaborateur, M. A. Buhl, a su mettre en relief (1). Dans l'un et l'autre de ces Ouvrages, l'exposé a un

(1) *Bull. des Sc. math.*, 1917, p. 108.

caractère élémentaire, tout au moins dans les premiers Chapitres, car ces Livres sont, dans leur genre, complets et tels que beaucoup de mathématiciens de profession seraient heureux d'en posséder, présents à l'esprit, les principaux résultats.

Il est visible, d'ailleurs, que M. de Montessus s'est assez souvent inspiré de l'Ouvrage de MM. Appell et Lacour.

C'est donc une excellente idée qu'ont eue les éditeurs du *Recueil* de Frenet, de demander à M. de Montessus de compléter cet Ouvrage par un formulaire des fonctions elliptiques. Celui-ci, qui ne comporte pas moins de 18 pages, eût peut-être paru excessif à H. Laurent qui, outre les fonctions elliptiques, avait à traiter les fonctions de variables imaginaires. Les vues actuelles permettent de regarder le formulaire de M. de Montessus comme un juste milieu entre le minimum qui pouvait être adopté il y a 20 ans et ce qu'enseignent les grands Ouvrages tels que celui d'Halphen. Non que la mémoire doive être chargée de tout cet ensemble : ce complément a précisément pour but de faciliter les recherches qui s'imposent souvent dans ce genre de questions et de suppléer aux défaillances, tres excusables, que la mémoire peut présenter.

On sait combien ont été flottantes, jusqu'ici, les notations qui concernent les fonctions elliptiques. M. de Montessus a cherché à les uniformiser, en s'inspirant des travaux les plus remarquables publiés sur ce sujet ; il a d'ailleurs rappelé les notations des principaux auteurs, en particulier celles de Jacobi, Weierstrass, Hermite, Jordan.

Ce ne sera peut-être pas son moindre mérite que d'avoir mis quelque ordre dans les notations de cette branche importante de l'Analyse et d'avoir ainsi contribué à en faciliter l'accès aux débutants.

Er. L.

SCHOENFLIES (A.). — Entwickelung der Mengelehre und ihrer Anwendungen. 1re Partie : Algemeine theorie der unendlichen Mengen und theorie der Punktmengen. 1 vol. in-8, 388 pages. Leipzig, Teubner ; 1913.

La théorie des ensembles, fondée par G. Cantor, il y a plus de 30 ans, a pris, depuis plusieurs années, une importance indéniable

en Mathématiques. Bon nombre de mathématiciens sont venus apporter leur contribution à l'œuvre de G. Cantor. En France, les recherches de M. C. Jordan, les leçons et les travaux de MM. E. Borel, R. Baire et H. Lebesgue ont largement contribué à répandre cette théorie, de sorte qu'à l'heure actuelle on ne peut plus contester ni sa portée philosophique, ni le rôle qu'elle doit tenir dans l'exposition des principes de l'Analyse. Il s'agit moins, en effet, d'un corps de doctrine isolé que d'une méthode générale dont l'influence se fait sentir dans les diverses branches des Mathématiques et dont les ressources contribuent largement à leurs développements. M. Schœnflies s'est proposé, ici, de faire un exposé complet du développement de la théorie des ensembles. Bien entendu, l'histoire et la bibliographie du sujet y tiennent une certaine place ; elles constituent la base même d'un tel exposé. Mais il y a beaucoup plus dans le Livre de M. Schœnflies. Le lecteur y trouvera clairement exposées les définitions et les idées essentielles, il pourra en suivre le développement et se reporter, s'il le désire, aux Mémoires originaux et aux Ouvrages dont les indications abondent ; il sera à même, et c'est je crois le désir de l'Auteur, d'apprendre la théorie elle-même dans son Livre. Aussi, M. Schœnflies en a-t-il démontré toutes les propositions principales ; il l'a fait avec clarté, concision et élégance. La plupart des Chapitres s'ouvrent par un exposé historique et critique de la question qui y sera traitée. L'Auteur montre ensuite l'enchaînement et l'importance relative des propositions qu'il expose et il a soin d'indiquer le point exact où est parvenue la théorie et les lacunes où elles subsistent. C'est par toutes ces qualités, par la richesse et l'abondance de la documentation, que son Livre ne peut manquer d'être remarqué et de rendre de grands et très réels services.

Il est divisé en deux Parties : La théorie générale des ensembles infinis, la théorie des ensembles de points.

I. La première notion qui se rencontre à la base de la théorie des ensembles transfinis est celle de *puissance* ou de *nombre cardinal*. Pour un ensemble fini, la puissance coïncide avec le nombre cardinal au sens ordinaire de ce mot ; la suite des nombres entiers a une puissance représentée par le symbole « *aleph* » zéro :

$\aleph_0$. On définit pour ces puissances le sens des symboles

$$a = b, \qquad a < b, \qquad a > b;$$

l'une de ces relations excluant les deux autres. Mais il n'est pas prouvé que les nombres cardinaux aient nécessairement le caractère des grandeurs. On établit, c'est là le théorème de MM. Schrœder et Bernstein, que *deux ensembles sont équivalents si chacun d'eux est équivalent à une partie de l'autre.* Alors, de tout ensemble transfini, il est possible d'extraire un ensemble partiel dénombrable et, par suite, $\aleph_0$ est le plus petit des nombres cardinaux transfinis.

Suivant les définitions données par G. Cantor, les opérations sur ces nombres et leurs propriétés prennent un sens très clair. L'une d'entre elles, l'*exponentiation* (*Potenz*), joue un rôle important: à cette notion généralisée se rattachent les travaux de F. Hausdorff sur les types d'ordre.

Parmi tous les nombres cardinaux transfinis, il en est un plus petit que tous les autres, $\aleph_0$, qui désigne la puissance des *ensembles dénombrables.* Ces ensembles ont une importance particulière en Mathématiques. Aussi, l'Auteur, après en avoir donné plusieurs exemples, ensemble de tous les nombres rationnels, algébriques, ensemble de tous les points de l'espace à coordonnées algébriques, résume-t-il les principaux résultats qui concernent la notion de dénombrabilité. On peut les traduire par les formules suivantes :

$$\aleph_0 + n = \aleph_0, \qquad n \times \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0;$$

n étant un entier quelconque.

Un ensemble continu de nombres a une puissance supérieure à $\aleph_0$; nous arrivons ainsi à la notion de *puissance* C *du continu.* Tout un Chapitre est consacré aux ensembles non dénombrables tels que continu à une dimension, nombres irrationnels, nombres transcendants compris dans un intervalle donné; continu à plusieurs dimensions et à une infinité dénombrable de dimensions; ensemble des fonctions d'une variable réelle, des fonctions analytiques, etc. La théorie des ensembles *simplement ordonnés* apporte alors la notion nouvelle de *type d'ordre.* Dans de tels ensembles, les éléments sont rangés dans un certain ordre de telle sorte que, de deux

éléments de l'ensemble, l'un précède l'autre, $a < b$ et que les conditions $a < b$, $b < c$ entraînent $a < c$. On arrive ainsi à la notion d'ensembles *semblables*, c'est-à-dire qui se correspondent de telle façon que les éléments de l'un soient rangés dans le même ordre que les éléments correspondants de l'autre. Deux ensembles semblables à un même troisième sont semblables entre eux. On est donc amené à envisager tous les ensembles semblables à un ensemble donné comme possédant un caractère commun. Il résulte de la considération des ensembles ordonnés semblables comme la notion de nombre cardinal est résultée de la notion d'ensembles équivalents. C'est la notion de *type d'ordre*. Si dans un type d'ordre on fait abstraction de la succession des éléments, on obtient le nombre cardinal de l'ensemble. Le plus simple des types d'ordre des ensembles infinis est celui de la suite des entiers positifs, dans l'ordre naturel.

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots;$$

on l'appelle le type d'ordre ω; l'ensemble

$$\ldots, \quad n, \quad \ldots, \quad 3, \quad 2, \quad 1$$

est dit l'inverse du précédent, son type d'ordre est $^*\omega$. On définit facilement les opérations élémentaires sur les types d'ordre et leurs propriétés: ces opérations ne sont pas commutatives. Si M est un ensemble ordonné, toute partie de M est un ensemble ordonné. On considère alors les parties de M qui sont, soit du type d'ordre ω, soit du type d'ordre inverse $^*\omega$. Les premières constituent les *séries fondamentales du premier ordre ascendantes* contenues dans M; les secondes, les *séries fondamentales descendantes*. A cette notion se rattachent celles de séries fondamentales liées et d'élément *limite* ou *principal*. Un ensemble ordonné dont tous les éléments sont principaux est *dense en soi;* un ensemble tel que toute série fondamentale y possède un élément limite est *fermé;* un ensemble à la fois fermé et dense en soi est *parfait*. On peut alors définir le type d'ordre de l'ensemble des nombres rationnels et du continu linéaire et donner les propriétés qui caractérisent ces types d'ordre. Parmi les ensembles ordonnés, il y a lieu d'étudier spécialement les ensembles *bien ordonnés*, pour lesquels tout ensemble partiel a un premier élément, et leurs propriétés essentielles. En désignant

par *segment* d'un ensemble, relatif à un élément de cet ensemble, l'ensemble des éléments qui le précèdent, la proposition fondamentale de la théorie des ensembles bien ordonnés consiste en ce que étant donnés deux ensembles bien ordonnés, ou bien ils sont semblables, ou bien l'un est semblable à un segment déterminé de l'autre. A tout ensemble bien ordonné correspond alors un type d'ordre ou un *nombre ordinal* (*Ordnungszahl*). Ces nombres possèdent le caractère des grandeurs. Parmi les nombres ordinaux, au sens général qui précède, figurent les entiers positifs. Ils forment, avec le nombre zéro, la classe I. Les nombres ordinaux, des ensembles bien ordonnés dénombrables, qui viennent immédiatement après les entiers positifs sont dits constituer la classe II. Ces nombres se divisent en nombres de première ou de seconde espèce suivant qu'ils ont ou non un précédent immédiat; ω est de seconde espèce. Après ω, le plus petit des nombres transfinis, viennent

$$\omega+1,\quad \omega+2,\quad \ldots,\quad \omega+\nu,\quad \ldots$$

(où ν est un entier positif). Cette suite de nombres de première espèce admet un élément-limite (nombre de seconde espèce) $\omega\times 2$.

Viennent ensuite les nombres

$$(\omega\times 2)+1,\quad (\omega\times 2)+2,\quad \ldots,\quad (\omega\times 2)+\nu,\quad \ldots,$$

puis $\omega\times 3$, et ainsi de suite.

Par application de la multiplication des types, en représentant par ω^2 l'élément-limite de la suite

$$\omega\times 1,\quad \omega\times 2,\quad \ldots,\quad \omega\times\nu,\quad \ldots,$$

d'une façon générale par ω^λ, le produit de λ facteurs égaux à ω, on est conduit à définir des nombres ordinaux représentés par des polynomes en ω.

Dans l'ensemble de ces nombres, on forme la série fondamentale

$$\omega<\omega^2<\omega^3<\ldots<\omega^\lambda<\ldots$$

dont le nombre-limite est désigné par ω^ω. D'une manière générale, si l'on considère la suite de nombres

$$\omega^{\alpha_1}<\omega^{\alpha_2}<\ldots<\omega^{\alpha_n}<\ldots,$$

où les α_n sont connus ainsi que le nombre $\lim\alpha_n$, cette suite a

pour nombre limite $\omega^{\lim \alpha_n}$. Nous arrivons ainsi aux nombres de la forme ω^γ, où γ est un nombre fini ou transfini. Ces expressions jouissent des propriétés de l'exponentielle. On arrive ainsi aux nombres de la forme $(\omega^\gamma \times \lambda) + \alpha$, λ étant un entier et α un nombre transfini inférieur à ω^γ. Après tous ces nombres vient le nombre $\omega^\gamma \times \omega$ ou $\omega^{\gamma+1}$. On définit ainsi ω^ω, ω^{ω^ω}, ...; L'ensemble des nombres de la classe II a une puissance supérieure à celle du dénombrable. On la désigne par $\aleph_1$. Au point de vue théorique, il est loisible d'envisager la formation d'ensembles bien ordonnés non dénombrables et parallèlement la définition de nombres transfinis de plus en plus grands. Le nombre qui suit immédiatement ceux de la classe II est le premier de la classe III, on le désigne par Ω.

Dans cet ordre d'idées entrent les travaux de MM. G. Hessenberg et E. Jacobsthal qui établissent les propriétés des nombres ordinaux indépendamment de la façon dont ces nombres ont été supposés engendrés. La question de savoir si tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné avait été déjà abordée par G. Cantor. L'Auteur a exposé, à ce sujet, les travaux de M. E. Zermelo. La théorie des fonctions est intimement liée aux théories dont nous venons de rappeler les grandes lignes. Aussi, l'Auteur a-t-il très judicieusement et fort souvent illustré, pour ainsi dire, la théorie par des exemples relatifs à la théorie des fonctions.

II. C'est la considération des ensembles de points qui a donné lieu à la théorie générale des ensembles. Ils s'étaient présentés, tout naturellement, dans la théorie des fonctions. Cette étude est dominée par le théorème de Bolzano-Weierstrass qui introduit la notion de *point-limite* ou *point d'accumulation* de l'ensemble. L'ensemble des points *limites* d'un ensemble P forme l'ensemble *dérivé d'ordre un* de P, P'. En désignant, d'une façon générale, par *dérivé d'ordre* ν de P, le dérivé de $P^{\nu-1}$, on démontre qu'il est possible de former des ensembles où P^ν existe quel que soit l'ordre ν. L'ensemble des points communs aux ensembles P^ν, quel que soit ν, forme l'*ensemble dérivé de* P *d'ordre* ω. La notion d'ensemble dérivé se généralise par l'introduction des nombres transfinis. On arrive ainsi à la notion d'ensemble dérivé d'ordre α, où α est un nombre de la première ou de la seconde classe, et enfin

de dérivé $P^{(\Omega)}$ formé par les points communs à tous les dérivés dont l'indice est un nombre de la première ou de la seconde classe.

Un ensemble est *fermé* s'il contient son dérivé; tout point d'un ensemble qui n'appartient pas à son dérivé est *isolé;* un ensemble qui ne contient pas de point isolé est *dense en soi;* il est *parfait*, s'il coïncide avec son dérivé, il est à la fois fermé et dense en soi. De même, relativement à un domaine D, où est situé un ensemble P, on arrive aux notions d'ensemble *partout dense*, quand toute partie de D contient des points de P, d'ensemble *dense nulle part*, etc.

La considération des ensembles dérivés conduit à des résultats importants, généraux et aujourd'hui classiques. Ils ont été mis en lumière par les recherches de du Bois-Raymond et Harnack sur les ensembles linéaires, et les travaux de M. Baire sur les ensembles fermés.

Ainsi, au point de vue de la puissance un ensemble fermé P peut se comporter de deux façons :

1° Le dérivé d'ordre Ω est nul; alors P est dénombrable;

2° Le dérivé d'ordre Ω existe; alors P a la puissance du continu.

A cet ordre d'idées se rattachent les propositions relatives à la *structure* d'un ensemble.

La notion d'*étendue* ou de *mesure* d'un ensemble est l'extension des notions géométriques de longueur, d'aire et de volume. Les différentes définitions de la mesure qui ont été données ont toujours pour but d'arriver à la généralisation de l'intégration. L'Auteur analyse ici les importantes recherches, sur ce sujet, dues à M. Cantor, à Hankel, à MM. Peano et Jordan. Puis il expose avec précision et développement la définition proposée par M. Borel dans ses « Leçons sur la théorie des fonctions » et qui fut reprise et complétée par M. Lebesgue dans ses « Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives ». On sait que, d'après ces auteurs, on se propose d'attacher, à chaque ensemble linéaire borné E, un nombre positif ou nul $m(E)$, qui sera dit sa mesure et qui devra satisfaire aux conditions suivantes : 1° Deux ensembles égaux ont même mesure; 2° l'ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, a pour mesure la somme des mesures des ensembles partiels; 3° le segment $(0, 1)$ a pour mesure 1.

Ce problème est possible pour certains ensembles qui sont dits

mesurables. La définition précédente s'étend aux ensembles situés dans un espace à n dimensions. Pour préciser, on introduit alors la *mesure linéaire*, la *mesure superficielle*, etc.

Toute cette seconde Partie est finalement illustrée pour ainsi dire d'exemples et d'applications, en même temps que nous y trouvons les dernières recherches sur la théorie elle-même. C'est ainsi que se trouvent résumés les travaux de M. Fréchet sur les *Ensembles abstraits*.

Nous avons essayé, dans l'analyse rapide qui précède, de donner quelque idée de la richesse, de la variété et de l'importance des matières traitées par M. Schœnflies, sans chercher à les indiquer toutes et à signaler tous les résultats importants obtenus.

E. OUIVET.

KILLING (W.) und HOVESTADT (H.). — HANDBUCH DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS. Zweiter Band, mit 9 Figuren im Text. 1 vol. in-8, x-472 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner; 1913.

Ce Volume, dû à la collaboration d'un professeur de l'Université de Munster, en Westphalie, et d'un professeur du Realgymnase de cette ville, fait suite à un autre que mon regretté maître M. J. Tannery a signalé, en 1910, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. C'est un Ouvrage didactique d'un genre très spécial, car il est destiné, non aux élèves, mais aux membres du corps enseignant. Il a pour but de donner à ceux-ci, avec un ensemble de notions qui peuvent leur être utiles, et qui se trouvent dispersées dans divers travaux originaux, un certain nombre de considérations pédagogiques et beaucoup d'exemples d'applications pratiques ou d'exercices susceptibles d'être donnés en devoirs aux élèves.

Le Volume en question est consacré à la Trigonométrie plane et sphérique, avec applications aux problèmes de résolution des triangles, analogues à ceux qui sont traités ou indiqués dans nos traités classiques, ou aux problèmes que suggèrent la Géodésie, la Navigation, la Géographie en général et la construction des Cartes. Il traite aussi de diverses questions de géométrie de l'espace, notamment des questions relatives à l'évaluation des

volumes ou des surfaces des corps, et des théorèmes généraux sur les polyèdres, considérés au point de vue de l'*Analysis situs*, en particulier des polyèdres réguliers.

Il peut être curieux de constater que l'exposition des principes de la Trigonométrie diffère notablement de celle qui est maintenant classique en France. Actuellement on considère, dans l'enseignement français, le cosinus et le sinus d'un arc comme les coordonnées d'un point du cercle de rayon égal à l'unité. MM. Killing et Hovestadt se placent, tout d'abord, au point de vue de Möbius qui donne une importance capitale au cosinus, défini comme le nombre par lequel il faut multiplier un segment pour avoir sa projection sur une droite autre que celle qui le porte. Le théorème fondamental de l'addition des arcs est déduit, soit du théorème de Ptolémée, soit de la combinaison des relations qui existent entre les éléments des triangles.

Parmi les applications de la Trigonométrie, je noterai les questions, se rapportant plutôt à l'Arithmétique qu'à la Trigonométrie proprement dite, et relatives aux triangles rectangles dont les côtés ont, deux à deux, des rapports commensurables. Les différents problèmes traités avec détail sont très variés et conduisent parfois à des équations de degré élevé. Tel est, par exemple, le problème suivant : Résoudre un triangle isoscèle, connaissant le rayon r du cercle circonscrit et la bissectrice w d'un des angles à la base. Si l'on prend pour inconnue la valeur commune α des angles à la base, on trouve facilement l'équation

$$w = \frac{2r \sin\alpha \sin 2\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}},$$

qui donne une équation du cinquième degré en $\sin\frac{\alpha}{2}$ (¹).

Il me semble que ce qui précède peut donner une idée de ce qui distingue ce *Manuel d'enseignement mathématique* des ouvrages didactiques français. C'est, je crois, ce qu'il y a de plus intéressant à signaler dans un Ouvrage de ce genre.

CH. BIOCHE.

(¹) L'expression donnée (p. 122) pour w contient au numérateur $\sin 3\alpha$ au lieu de $\sin 2\alpha$; mais les équations qui suivent sont exactes.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOURSAT (ÉDOUARD). — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, tome II, 3e édit. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris), 1 vol. gr. in-8, IV-672 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1918.

L'édition précédente a été analysée dans ce *Bulletin* par M. Lacour, en 1911 (p. 293).

L'édition actuelle en diffère principalement par quelques additions. Par exemple, M. Goursat a étudié la limite de la somme d'une série de Taylor pour des points tendant vers un point du cercle de convergence, où la série est convergente, en suivant une courbe quelconque non tangente au cercle de convergence; précédemment il n'avait considéré que le cas particulier du rayon. A propos des séries de Laurent, nous trouvons une remarque nouvelle sur la somme et sur le *produit* d'une série de puissances de x et d'une série de puissances de $\frac{1}{x}$. Relativement aux méthodes élémentaires d'intégration des équations différentielles, M. Goursat a signalé le parti qu'on peut tirer du remplacement de l'équation

$$F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

par les expressions de x et de $\frac{d^n y}{dx^n}$ en fonctions d'un paramètre. Une Note a complété ce qui était dit antérieurement du Calcul des limites. La théorie des systèmes linéaires à coefficients constants a été établie d'emblée pour un nombre quelconque d'équations. La méthode de J. Bertrand pour les équations aux différentielles totales a été interprétée géométriquement, au moyen des tourbillons. Le problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre et une courbe quelconque a été illustré par un exemple.

Plusieurs exercices ont été ajoutés : Chapitre XIII, n° 24; Chapitre XIV, nos 29 à 31 : le n° 29 étend la formule de Lagrange à l'équation

$$z - a - \alpha f(z) - \beta \varphi(z) = 0.$$

Au Chapitre XXII, l'exercice 24 est aussi nouveau. Au Chapitre XV, l'exercice 3 a été changé.

L'addition la plus importante est une Note placée à la fin du volume, et qui traite du théorème de M. Picard relatif aux racines de

$$f(x) = a,$$

où $f(x)$ est une fonction entière, et de ses généralisations. N'ayant pas parlé de la fonction modulaire, M. Goursat est conduit à sacrifier l'élégante brièveté des démonstrations qui l'emploient, et, parmi les méthodes dérivées des travaux de M. Borel, il a choisi celle de M. Schottky, avec quelques changements de détail; il démontre ainsi la généralisation de M. Landau.

Signalons encore, parmi les changements de détail épars dans le volume, l'indication de nouvelles références bibliographiques. Bref, M. Goursat n'a rien négligé pour que cette nouvelle édition apporte à son tour aux travailleurs et aux étudiants le secours si précieux que leurs devanciers ont trouvé dans les précédentes.

GEORGES GIRAUD.

CULLIS (C.-E.). — MATRICES AND DETERMINOIDS. Vol. II (University of Calcuta; Readership Lectures). In-8° jésus, 555 pages. Cambrige, at the University Press, 1918.

Ce second Volume, de 555 pages, ne contient pas encore tout ce que l'Auteur aurait voulu publier de sa théorie des matrices. Un troisième Volume est annoncé. Voici un résumé succinct de ce que contient le Volume II.

Le Chapitre XII (le premier du Volume II) est une Introduction pour ceux qui suivent. Il contient les définitions des matrices composées, des matrices divisées, des parts de ces matrices, des primaires d'un déterminant mineur quelconque d'une matrice; on cherche ensuite les rangs possibles d'une matrice qui contient une matrice mineure donnée.

Le Chapitre XIII traite des relations entre les éléments et les déterminants mineurs d'une matrice. Partant de la détermination des liaisons entre les rangées courtes d'une matrice non dégénérée, on est conduit aux relations entre ses déterminants mineurs simples,

puis aux équations correspondantes vérifiées par les éléments et les déterminants mineurs d'ordre r d'une matrice de rang r : tous les résultats peuvent d'ailleurs se déduire d'une certaine identité fondamentale. On établit les identités de Sylvester contenant les superdéterminants primaires d'un déterminant. On détermine les conditions de l'équivalence de deux matrices semblables non dégénérées et l'équivalence de deux systèmes d'équations algébriques linéaires; on regarde un système de matrices semblables non dégénérées équivalentes comme représentant une région (spacelet) et l'on définit les matrices non dégénérées et les régions mutuellement orthogonales et mutuellement normales.

Le Chapitre XIV commence par un exposé des propriétés de deux matrices complètes conjointes des déterminants mineurs d'une matrice carrée fondamentale; leurs déterminants sont évalués, et l'on trouve la relation entre deux quelconques de leurs déterminants mineurs anticorrespondants. Ces propriétés sont utilisées pour obtenir les développements de certains déterminants bordés. On s'occupe ensuite des propriétés des matrices symétriques, des matrices symétriques gauches. On donne des critères pour la détermination de leur rang; elles sont ramenées à des formes canoniques par dérangements symétriques de leurs rangées.

Dans le Chapitre XV, on s'occupe du rang des matrices produits et des matrices facteurs. On montre que le rang d'une matrice n'est pas changé quand on la multiplie à droite ou à gauche par une autre matrice dont le rang est égal à sa passivité. On détermine les rangs possibles des solutions d'une équation matrice de chacune des formes

$$AX = C, \qquad XB = C, \qquad AXB = C.$$

On donne en même temps les formules des solutions générales. On détermine les rangs possibles de la matrice produit et des matrices facteurs dans une matrice produit quelconque quand quelques-unes de ces matrices sont données et ont des rangs donnés. On définit les matrices équivalentes horizontalement et verticalement, ainsi que les réunions ou intersections de régions et de matrices, et les relations entre les matrices et les régions.

Le Chapitre XVI traite des transformations équigrades d'une matrice dont les éléments sont constants. Ces transformations

correspondent aux transformations linéaires ordinaires de formes bilinéaires et quadratiques. On donne leurs propriétés générales. On considère certaines transformations équigrades spéciales unitaires et non unitaires. On s'occupe de la réduction des matrices d'éléments constants à des formes canoniques par des transformations équigrades, en particulier pour les matrices symétriques et les matrices symétriques gauches. La forme canonique la plus simple est une matrice semblable qui est conventionnellement égale à la matrice unité $[1]_r^r$, et chaque matrice de rang r à éléments constants peut être déduite de la matrice unité $[1]_r^r$ par une transformation équigrade.

Le Chapitre XVII traite de certaines équations matrices du deuxième degré. On y envisage les équations $XY = AB$, $XY = C$. On s'occupe d'équations de forme symétrique. On montre comment toutes les solutions d'équations symétriques de la forme $X'X = I$, où I est une matrice unité, peuvent être trouvées : on appelle ces solutions des matrices semi-unités. On détermine les solutions générales de toutes les équations symétriques de la forme $X'X = A'A$, $X'X = C$. On montre comment on peut trouver toutes les solutions de l'équation symétrique $X'AX = C$. La théorie générale des matrices extravagantes est solidement basée sur ces résultats.

Le Chapitre XVIII traite des extravagances des matrices et des régions dans l'espace homogène. On définit les extravagances d'une matrice : on obtient des formules générales relatives à une matrice dont on donne les ordres, le rang et les extravagances. On considère les propriétés de deux matrices mutuellement normales, non dégénérées : on montre que les déterminants mineurs simples rangés de l'une quelconque d'entre elles sont proportionnels aux déterminants mineurs simples affectés anticorrespondants de l'autre. On prouve que ces matrices ont la même extravagance. On effectue la réduction d'une matrice non dégénérée quelconque à une matrice non dégénérée semblable équivalente dont les rangées longues sont mutuellement orthogonales. On définit les noyaux d'une matrice non dégénérée, puis l'extravagance, le noyau (*core*) et le plein (*plenum*) d'une région. On donne des formules générales relatives à une région dont le rang et l'extravagance sont connus. On complète la détermination de toutes les suites possibles de solutions

indépendantes mutuellement orthogonales d'un système quelconque d'équations linéaires algébriques homogènes, détermination qui avait été faite incomplètement dans le Chapitre XI (Volume I). On cherche les rangs possibles et les extravagances de régions satisfaisant à certaines conditions. L'extravagance d'une région (ou le degré de son orthogonalité avec elle-même) est la propriété la plus importante après le rang. Elle est invariante dans une transformation semi-unitaire des points de l'espace, et peut être interprétée comme étant l'ordre de contact de la région avec la quadrique absolue. Une région qui a la plus grande extravagance compatible avec son rang est ou complètement extravagante, ou pleinement extravagante. Une région complètement extravagante est orthogonale avec elle-même; une région pleinement extravagante contient tous les points orthogonaux à elle-même; une région complètement extravagante est une région génératrice de la quadrique absolue. A chaque région est associée une région complètement extravagante qui est le lieu des points en lesquels la région touche la quadrique absolue (c'est le noyau) et une région pleinement extravagante qui est la plus petite région contenant la région donnée et tous les points orthogonaux avec elle [c'est le plein (*plenum*)].

Le Chapitre XIX s'occupe principalement de l'orthotomie mutuelle de deux régions, c'est-à-dire du degré de leur orthogonalité mutuelle. Les résultats les plus intéressants sont ceux qui se rapportent à la plus grande orthotomie possible de deux régions. On détermine l'orthotomie possible lorsque l'on connaît seulement les rangs des deux régions; puis avec les rangs on se donne d'autres conditions: on envisage les cas dans lesquels les deux régions sont situées dans une autre région donnée, ou contiennent toutes deux une région donnée; les cas dans lesquels les deux régions ne se coupent pas ou sont mutuellement complémentaires, et le cas plus important où les deux régions ont une intersection donnée. Enfin on considère les propriétés générales de régions mutuellement orthogonales.

R. Le Vavasseur.

MORITZ (R.-E.). — MEMORABILIA MATHEMATICA or the Philomath's Quotation-Book. In-8° cartonné, XII-410 pages. New-York, The Macmillan Company, 1914.

Préface. — L'Auteur a réuni en un seul volume un millier et plus de citations exactes, avec références directes ou indirectes aux sources, de passages plus ou moins célèbres relatifs aux mathématiques, par des poètes, par des philosophes, par des historiens, par des hommes d'État, par des savants appartenant à d'autres disciplines et surtout par des géomètres. Pareil Recueil sera un encouragement, une source de distraction et peut-être d'inspiration pour les jeunes mathématiciens, une échappée sur un domaine trop peu connu pour les profanes : car ils pourront souvent comprendre les citations, dont un grand nombre sont choisies à dessein parmi celles qui n'ont pas un caractère trop technique. Elles sont empruntées à trois cents auteurs, groupées en vingt chapitres, et sont relatives à près de sept cents sujets différents.

De propos délibéré, l'Auteur a, en général, évité les citations qui sont dans REBIÈRE, *Mathématiques et Mathématiciens*, et dans AHRENS, *Scherz und Evust in der Mathematik*, recueils semblables aux siens; il a toutefois admis un petit nombre de passages célèbres que l'on y trouve et dont l'exclusion n'a pas semblé possible.

Le recueil est fatalement incomplet à cause de l'abondance des matières, et aussi parce qu'il y a sans cesse de nouveaux écrivains qui parlent des mathématiques d'une manière originale. Quelques géomètres, très grands comme tels, n'ont pas fourni une seule citation; d'autres, au contraire, se prêtent tout naturellement à des extraits très caractéristiques. Les écrivains de langue anglaise occupent d'ailleurs une large place.

Enfin, l'Auteur avoue que, dans ses choix, il s'est laissé aller souvent à sa fantaisie, songeant toutefois aussi à être utile à ses lecteurs, mathématiciens ou autres.

I. *Définitions et objets des mathématiques* (p. 1-9). — Trente-cinq citations (numérotées 101 à 135, le premier chiffre donne le

Chapitre) de Descartes, Sylvester, Comte, Grassmann, Bacon, Whewell, Chrystal, Whitehead, Kant, Klein, Russell, et d'autres auteurs moins connus. La plupart disent que les mathématiques ont pour objet la théorie des fonctions. Les philosophes non géomètres ne brillent pas par la clarté de leurs assertions; quelques mathématiciens émettent de curieux paradoxes, comme celui-ci : « Les mathématiques peuvent être définies quelque chose où nous ne savons de quoi nous parlons, ni si ce dont nous parlons est vrai » (Russell, 127). Une des meilleurs pensées est la dernière du Chapitre : « Les mathématiques sont la Science des lois fonctionnelles et des transformations qui nous permettent d'exprimer en nombres l'espace et le mouvement » (Howison, 135).

II. *La nature des mathématiques* (p. 10-38, nos 201 à 276). — Beaucoup de vues, les unes banales, superficielles ou paradoxales, les autres originales, remarquables, profondes. Exemple : Kant, no 201, sur une prétendue révolution mathématique en Grèce, vers l'époque de Thalès. Fourier, no 218 : le célèbre passage où il développe cette pensée : les mathématiques n'ont pas de termes pour exprimer des idées vagues. C.-J. Keyser, no 225 : la précision des mathématiques provient du genre d'idées qu'elles étudient. Barrow, no 227 : les mathématiques ne s'attaquent qu'aux questions où l'on peut voir clair. Pringsheim, no 232 : les mathématiques sont évidentes pour les mathématiciens, incompréhensibles pour les autres. Hopkinson, no 239 : on ne retire du moulin mathématique que ce que l'on y a mis, mais il en sort sous une forme infiniment plus utile. Leibniz, no 261 : les premiers principes des mathématiques sont les plus difficiles à établir. Nos 249, 250, 251, 244, 258 : les célèbres paradoxes de Huxley sur les mathématiques, et leur réfutation par Sylvester, Keyser, de Morgan. Mc Cormack, no 270 : les Manuels mathématiques ont un aspect terrifiant qui, par une sorte de mimétisme, en défend l'accès aux profanes. Keyser, no 272 : les idées mathématiques ont des analogues dans les autres objets dont l'homme s'occupe, d'où leur utilité beaucoup plus grande qu'il ne semble au premier abord. Th. Hill, no 274 : le véritable esprit de Mathesis (des Mathématiques) est religieux. Il élève à Dieu Tout-Puissant, Sagesse éternelle.

III. *Éloge des mathématiques* (p. 39-48, nos 301 à 334). — Assertions de toute espèce, justes, banales, singulières parfois. Résumons-en quelques-unes au hasard. Dodgron, n° 302 : les mathématiques nous donnent des certitudes. Schellbach, n° 306 : mourir sans avoir connu les mathématiques ni les résultats des récentes investigations scientifiques, c'est n'avoir pas connu la vérité. Lord Kelvin, n° 312 : les mathématiques sont l'*éthereálisation* du sens commun. Aristote, n° 318 : les mathématiques, sans nommer le beau, l'étudient en s'occupant de l'ordre et de la symétrie. Everett, n° 325 : les vérités mathématiques existent en Dieu de toute éternité. Th. Hell, n° 333 : les découvertes de Newton ont plus fait pour l'Angleterre et les Anglais que tous leurs rois.

IV. *Valeur des mathématiques* (p. 49-71, nos 401 à 461). — L'influence des mathématiques dans l'éducation de l'esprit ou même dans l'éducation en général est bien mise en relief, non seulement par des mathématiciens, mais aussi par des penseurs étrangers aux sciences mathématiques, comme Gœthe, parce qu'ils montrent inconsciemment ce qui leur manque en fait de savoir précis. Mais presque tous les auteurs cités exagèrent leurs éloges, parce qu'ils ignorent la distinction si bien mise en lumière par Bordas (il la fait remonter à Malebranche et même à Platon) entre les idées de grandeur et les idées morales : exercer l'entendement dans le domaine des premières n'est pas aussi favorable qu'il le paraît au premier abord pour l'habituer au maniement des idées morales. Parmi les meilleurs passages cités dans ce Chapitre, nous en notons un de Barrow, n° 402; plusieurs de Todhunter, nos 405, 407, 414, 415, 422, particulièrement touchant l'influence de l'enseignement des mathématiques sur la volonté : il ne sépare pas d'ailleurs les langues anciennes des mathématiques.

V. *Enseignement des mathématiques* (p. 72-85, nos 501 à 540). — Excellent Chapitre, plein d'observations judicieuses pour ainsi dire d'un bout à l'autre. L'enseignement des mathématiques a pour but de développer les aptitudes de l'élève dans ce domaine; il doit être accompagné d'applications pas trop nombreuses et elles ne doivent pas avoir un but professionnel (nos 501

à 507, 517, 534). Les professeurs doivent être des mathématiciens, non des professeurs de science appliquée (nos 513, 522). Les démonstrations doivent reposer sur des principes généraux (Newton, no 530), ce qui n'exclut pas la simplicité, au contraire (Hilbert, no 537). Point d'escamotage dans les démonstrations à aucun prix (Grassmann, no 538). Pour bien faire sa leçon, le professeur doit la préparer avec soin, mais de manière que la préparation soit séparée de la leçon par un certain temps, pendant laquelle la matière préparée fermente (A. de Morgan, no 540). Les mathématiques ne sont pas plus l'art de calculer et de compter que l'architecture n'est l'art de faire des briques ou de couper du bois, la peinture celui de mélanger des couleurs sur une palette, la géologie celui de briser les roches, ou l'anatomie l'art du boucher (C.-J. Keyser, no 515).

VI. *Étude des mathématiques; recherches en mathématiques* (p. 86-107, nos 601 à 664). — Encore un Chapitre très intéressant. L'étudiant doit appliquer les théories étudiées à un petit nombre d'exemples simples (nos 603, 608); étudier son Manuel à fond, le lire à l'endroit et à l'envers pour en saisir l'ensemble (nos 605, 606, 697). On doit être persuadé que toutes les questions sont solubles, ou qu'on peut en démontrer l'insolubilité (Hilbert, no 227). L'élégance des résultats d'une étude est à rechercher, car elle est un indice de la portée de la méthode employée, même en dehors de cette recherche (Poincaré, no 640). On ne peut être géomètre, dans le sens propre du mot, sans s'aider du secours de l'analyse (Segre, no 643). On a besoin de bons traités, comme l'Algèbre de Chrystal, pour ne pas se perdre dans la forêt des Mémoires particuliers; ceux-ci devraient être aussi parfaits que possible pour le fond et pour la forme (Glaisher, nos 639, 649). La recherche mathématique doit se faire librement, sans souci des applications; les belles théories serviront infailliblement quelque jour (nos 663, 664). Nous aurions voulu trouver ici cette pensée de H.-J.-S. Smith (*Proc. of the Lond. Math. Soc.*, VIII, p. 21) : « Mathematical discovery is like Electricity; its follows the lines of least resistance. »

VII. *Les mathématiques modernes* (p. 108-120, nos 791 à 740). — Essais peu concordants pour caractériser les mathématiques

modernes en comparaison des mathématiques anciennes. Les mathématiques modernes traitent les propositions sous une forme plus générale (n° 711), sous forme fonctionnelle (n° 715), discutent les principes (n° 717), emploient l'idée de variable (n° 720); de fonctions d'une variable imaginaire (n°s 721, 722), la théorie des transformations (n° 726), des substitutions et des groupes (n° 727). On loue communément le pouvoir incomparable des méthodes mathématiques actuelles, mais au fond rien n'est moins connu (Rosanes, n° 730); le domaine mathématique est le seul où la presse omnisciente ne peut pénétrer (Pringsheim, n° 732), ce qui ne l'empêche pas de proclamer qu'il ne contient rien d'intérêt général (Forsyth, n° 736). Tout cela est vrai, mais l'histoire prouve que des mathématiques anciennes on a passé aux mathématiques modernes d'une manière continue sans saut brusque: les découvertes les plus récentes ont des antécédents dans le passé.

VIII. *Le mathématicien* (p. 121-134, n°s 801 à 845). — Weierstrass, n° 802 : le parfait mathématicien est toujours un peu poète. Novalis, n° 810 : un grand mathématicien peut ne pas savoir calculer et un grand calculateur ne pas avoir la moindre idée des mathématiques. Gœthe, n° 813 : les mathématiciens, comme les Français, traduisent dans leur langue ce que vous leur dites et en font immédiatement quelque chose de tout différent. S. Lie, n° 818 : L'imagination, l'énergie, la confiance en soi, la critique de soi-même, caractérisent le mathématicien. Lord Kelvin, n° 822 : le mathématicien, c'est celui qui voit que l'intégrale de Laplace (gamma de $\frac{1}{2}$) est égal à $\sqrt{\pi}$. Barrow et Sylvester, n°s 830, 829 : un mathématicien accompli est un piètre orateur. Th. Hill, n°s 841, 843 : tout le monde juge, approuve ou condamne les philosophes, les hommes d'État, les orateurs; mais personne ne se risque à juger les mathématicieus, qui ne peuvent être jugés que par leurs pairs et parfois longtemps après leur mort.

IX. *Personnes et anecdotes* (p. 134-165, n°s 901 à 996, A à M); X. (p. 166-1807, n°s 1001 à 1050, N à W). — Récits, appréciations, anecdotes sur Alexandre-le-Grand, Archimède (n°s 902 à 913), Aristote, Bacon, D. et J. Bernoulli, Babbage, les deux Bolyai,

Balzano, Cayley (nos 930 à 937), Clifford, Comte, De Moivre, de Morgan, Descartes, Euclide, Euler (nos 956 à 967), Flamsteed, Fourier, Gauss (nos 970 à 975), Gœthe, Sir William Hamilton, Helmholtz, Jacobi, Johnson (nos 977 à 983), Kepler, Lagrange, Laplace, Leibnitz (nos 987 à 991), Lie, Bhascara, auteur du *Lilawati*, Macaulay, Napoléon, Newton (nos 1002 à 1029), Sylvester (nos 1030 à 1042), Tait, Sir William Thomson (nos 1045 à 1048), Weierstrass. Ces deux Chapitres, malgré des lacunes évidentes (trop de noms y manquent : Abel, Cauchy, Jacobi, Steiner, par exemple), sont très intéressants et très amusants. Mais pourquoi y introduire des ignorants en mathématiques, comme Bacon et Sir William Hamilton le philosophe? Parmi les mathématiciens les mieux caractérisés, il faut signaler spécialement Sylvester.

XI. *Les mathématiques comme appartenant aux beaux-arts* (p. 181-193, nos 1101 à 1136). — Trente-cinq pensées originales et justes de grands et petits mathématiciens, de physiciens et de poètes, sur la jouissance esthétique que procure la contemplation du monde mathématique et sur ses relations avec la poésie, la musique, la peinture et la sculpture; pour terminer, une pensée très contestable de Weissmann, à propos de l'hérédité des facultés mathématiques (no 1136). Nous aurions préféré le passage où Gauss parle de la *divina venustas fonctionum ellipticarum*.

XII. *Les mathématiques comme langage* (p. 194-200, nos 1201 à 1222). — Laplace, no 1222 : le langage de l'analyse est un puissant instrument de découvertes. Hill, no 1209 : il ne faut pas vouloir interpréter tous les stades intermédiaires d'un calcul, sous peine de perdre les avantages du langage analytique. Ces pensées se retrouvent sous diverses formes dans presque tous les passages cités dans le Chapitre. Quelques citations nous semblent inexactes au point de vue historique.

XIII. *Les mathématiques et la logique* (p. 201-208, nos 1301 à 1326). — Beaucoup de pensées justes avec un peu d'exagération provenant de ce que les auteurs ne distinguent pas les idées de grandeur d'avec les autres. Aux nos 1303, 1306, citations de Franklin et de Pascal auxquelles nous ne voudrions pas souscrire.

XIV. *Mathématiques et philosophie* (p. 209-223; nos 1401 à 1442). — Whitehead, no 1493 : les philosophes qui ont connu à fond les mathématiques sont parmi ceux qui ont fourni à la science quelques-unes de leurs meilleures idées. D'autre part, on peut dire, sans devoir faire à peine une exception, que les remarques relatives aux mathématiques dues à des philosophes qui n'en ont qu'une connaissance légère, ou acquise à la hâte, ou tardivement, sont sans valeur, parce qu'elles sont triviales ou fausses. Appliquez cette dernière pensée de Whitehead à tous les philosophes cités dans le Chapitre, Descartes, Leibniz et Bordas exceptés, et vous verrez combien elle est vraie. On peut d'ailleurs la vérifier dans tous les Chapitres du Livre, en particulier dans XV, XVIII.

XV. *Les mathématiques et les sciences* (p. 224-260; nos 1501 à 1599 b). — Nécessité ou haute utilité de l'aide des mathématiques en Physique, en Astronomie, dans les sciences sociales, en Statistique, même en Chimie et en Biologie, dans la théorie des erreurs. La valeur des diverses raisons données en faveur de ces vues est très différente suivant les auteurs cités. Macaulay, no 1527 : un homme intelligent et appliqué peut apprendre en quelques années plus de mathématiques que Newton n'en a jamais su. Forsyth, no 1539 : il faut bien savoir les mathématiques théoriquement pour pouvoir les appliquer utilement à la Physique.

XVI. *Arithmétique* (p. 261-274; nos 1601 à 1648). — Pensées banales sur l'arithmétique élémentaire et parfois bien singulières; par exemple, celle de Fitch, no 1624 : il voudrait qu'on en enseignât la théorie dans les écoles primaires; pensées très hautes et très profondes de Gauss, Kronecker, H.-J.-S. Smith, Jacobi, Glaisher, sur l'arithmétique supérieure, sa supériorité sur les autres parties des mathématiques, sur les difficultés qu'elle présente au point de vue de la démonstration naturelle de ses principes. Glaisher demande avec raison qu'on lui fasse une petite place dans l'enseignement universitaire. On trouve la citation de dix vers allemands où Jacobi (no 1643) a démarqué une poésie de Schiller (no 907) en la surpassant.

XVII. *Algèbre* (p. 275-291; nos 1701 à 1755). — Citations bonnes ou très bonnes sur l'algèbre en général, sur les quaternions, les imaginaires, les invariants, les groupes, la théorie des fonctions

d'une variable imaginaire. D'Alembert, n° 1702 : l'algèbre est généreuse : elle donne souvent plus qu'on ne lui demande. Lagrange, n° 1707 : l'algèbre et la géométrie une fois unies ont progressé rapidement. Chrystal, n° 1710 : il n'est nullement nécessaire de recourir à la géométrie pour exposer les parties élémentaires de l'algèbre. Cayley, n° 937 (p. 148) n'estime guère les quaternions. Lord Kelvin, n° 1721 : ils ont fait du mal à plusieurs. Tait, n° 1724 : ils font trouver naturellement le meilleur système de variables à employer en physique ; n° 1726 : malheureusement ils ne s'appliquent pas à l'espace à n dimensions. C.-J. Keyser, n° 1749 : la théorie des invariants suggère des pensées théologistes justes sur l'Être éternel, immuable au milieu du flux des choses changeantes. A propos des quaternions, on aurait pu citer la définition de J. Marsan, extensible à tous les espaces : un quaternion est un nombre plus un vecteur. Lasswitz, n° 1741 : jolie parodie algébrique de la scène du *Faust* où Méphistophélès donne des conseils à l'étudiant (*suite*, n°s 1934, 2040).

XVIII. *Géométrie* (p. 292-322 : n°s 1801 à 1894). — Beaucoup d'opinions de toutes valeurs à propos desquelles nous rappelons la remarque finale du Chapitre XIV : les commençants ne doivent pas prendre pour certaines maintes assertions historiques qui s'y trouvent incidemment. A noter spécialement l'éloge des *Éléments* d'Euclide par maints bons géomètres, tandis que d'autres, comme Sylvester, voudraient le bannir de l'enseignement. Cicéron, n° 1807 : chez les Grecs, la géométrie était tenue en grand honneur, ainsi que les mathématiques en général. Chez les Romains, on n'en a considéré que l'utilité pour le calcul et la mesure. Bel éloge de la géométrie projective, n°s 1876 à 1880 (entre autres par Steiner, n° 1877). Gauss, n° 1886, blâme la notation $\sin^2\varphi$ pour désigner $(\sin\varphi)^2$. Un anonyme, n° 1894, fait une ode très originale sur les *screws* (hélices, translations-rotations) de Ball. On ne trouve pas parmi les citations l'idée fondamentale de De Tilly : la géométrie est la physique mathématique des distances. Voici une pensée de H.-J.-S. Smith (n° 1820) qui aurait dû être placée dans le Chapitre V : « La géométrie n'est rien si elle n'est pas rigoureuse ; elle perd toute sa valeur éducative si l'on n'a cure de la rigueur des démonstrations. »

XIX. *Le calcul (infinitésimal)*, etc. (p. 323-344, nos 1901 à 1975). — Il n'y a pas de Chapitre où le lecteur peu instruit en analyse ou en histoire des mathématiques doive plus se mettre en garde contre des assertions signées de philosophes incompétents, ou même de grands mathématiciens. Mill, nº 1903 : Comte a créé la philosophie des hautes mathématiques (inexact, car Comte n'a pas même vu clair dans la théorie des séries). Nos 1904 à 1909, 1911, 1916, 1940, 1943, 1946, 1948 : opinions étonnantes sur les pseudo-infiniment petits; Cauchy, Duhamel, Peano, ne sont évidemment pas assez connus hors de France et d'Italie. La fin du Chapitre est consacrée au calcul des probabilités, surtout d'après Laplace. Aucune citation ne se rapporte à la loi des grands nombres de Poisson.

XX. *Les concepts fondamentaux, temps et espace* (p. 344-363, nos 2001 à 2040). — Nos 2001, 2002 : vues de deux philosophes étrangers aux sciences mathématiques, Kant et Schopenhauer, sur le temps et l'espace; ensuite, maintes remarques de second ordre sur la géométrie non euclidienne, suivies heureusement d'extraits de Gauss sur le même sujet, ceux-ci vraiment admirables, nos 2023 à 2027; puis quelques citations sur les espaces à plus de trois dimensions.

XXI. *Paradoxes et curiosités* (p. 364-383, nos 2101 à 2160). — Beaucoup d'amusantes curiosités, en prose et en vers, sur la droite, les parallèles, la trisection de l'angle, sur Gulliver à Laputa, où Swift révèle inconsciemment la limitation de ses connaissances en mathématiques sur π, sur le dernier théorème de Fermat, sur les relations des polyèdres réguliers avec les distances des planètes d'après Kepler, sur les vertus du nombre trois, de 77, sur l'interprétation des noms en nombres, sur des anagrammes divers, sur les points isolés d'une courbe qui symbolisent les miracles, sur les pseudo-mathématiciens qui parlent des mathématiques avec assurance sans en rien savoir. Voici, sur les paradoxes, une pensée très juste de H.-J.-S. Smith qui aurait pu terminer l'Ouvrage : « An apparent contradiction (as distinct from a mere misunderstanding) is always to be regarded as an indication of some undiscovered truth. » (*Proc. of the London Math. Society*, vol. VIII, p. 25).

Index (p. 385-410) extrêmement soigné. Cet Index permet de retrouver rapidement toute citation dont on a retenu soit l'objet, soit le nom de l'auteur. Nous espérons que, dans une seconde édition, on introduira des citations de géomètres, qu'on s'étonne de ne pas y rencontrer maintenant, comme Cauchy, Abel, Tchebychef, Peano, et qu'on en bannira les pseudo-mathématiciens trop ignorants.

En résumé, le Livre de M. Moritz est extrêmement intéressant.

Paul Mansion.

KLEIN und SOMMERFELD (A.). — Ueber die Theorie des Kreisels. Zweiter durchgesehener abdruck, Helft 1 : *Die kinematischen und kinetineschen grundlagen der Theorie*. 1 vol. in-8. VII-196 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1914.

Bien que cet Ouvrage important, comprenant quatre fascicules in-8 de 200 à 300 pages chacun, soit intitulé : *Théorie de la Toupie*, les auteurs ne se sont pas contentés de traiter le problème spécial dont le nom sert de titre à l'œuvre entière. Tout au contraire, cette étude de la toupie est, pour MM. Klein et Sommerfeld, l'occasion d'une très longue et très intéressante excursion dans tous les domaines de la Mécanique et même dans certaines parties de l'Analyse et de la Géométrie. C'est ce qui donne à l'Ouvrage sa physionomie toute particulière. C'est ainsi qu'au sujet de la représentation du mouvement de la toupie à l'aide des fonctions elliptiques, on trouve une très belle introduction à la théorie de ces fonctions, faite sur les intégrales mêmes qui figurent dans le problème particulier, et suivie des considérations relatives à la surface de Riemann qu'on peut leur faire correspondre et des développements en série des fonctions $\mathfrak{S}$, le tout précédant l'expression définitive des paramètres dont dépend le mouvement à l'aide de ces séries $\mathfrak{S}$ et un exemple numérique qui, traité dans tous ses détails, apprend au lecteur l'utilisation pratique des fonctions doublement périodiques et de leurs développements en séries. Cet exemple caractérise assez bien la méthode suivie par les Auteurs. A propos de chaque question, trouvant son origine dans le problème de la

toupie, MM. Klein et Sommerfeld sont amenés à exposer chacune des théories fondamentales de la Mécanique; ils n'hésitent pas à remonter jusqu'aux notions premières, à préciser et à discuter les grands principes.... C'est, à travers la Mécanique, un véritable voyage avec ses imprévus, ses points de vue inattendus... infiniment plus attrayant que l'exposé dogmatique, habituellement adopté, de la Mécanique rationnelle. Aussi bien, cet Ouvrage, paru il y a déjà une quinzaine d'années et présenté à cette époque aux lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques* par notre maître regretté Jules Tannery, a-t-il eu un grand succès qui justifie la publication d'une seconde édition.

Lorsque M. Félix Klein fit dans l'hiver 1895-96 à Göttingen un cours sur la toupie, cours qui est l'origine de l'Ouvrage que nous analysons, indépendamment du but que nous avons cherché à caractériser dans les lignes qui précèdent, il en avait en vue deux autres qu'il a nettement indiqués dans la Préface de son œuvre. Il trouvait qu'en Allemagne notamment, l'enseignement de la Mécanique était envisagé d'une manière trop abstraite. La méthode anglaise, beaucoup plus concrète, ayant le souci constant des réalités physiques et si bien mise en lumière dans les Ouvrages de Tait et Thomson (*Treatise on natural Philosophy*) et de Routh (*Dynamics of a System of rigid Bodies*) lui semblait infiniment préférable. Et dans la *Théorie de la Toupie*, il a voulu réagir contre la tendance allemande et ne jamais perdre le contact des réalités naturelles. M. Klein voulait également montrer le grand intérêt qu'il y a à introduire en Mécanique, les méthodes par lesquelles Riemann a fait faire de si grands progrès à la théorie des fonctions. Nous n'insisterons pas ici sur cette idée aussi ingénieuse que féconde, nous bornant à la signaler pour donner une vue d'ensemble sur le plan et les idées de l'auteur, parce que ce n'est pas dans le premier fascicule qu'elle est développée.

Dans l'Introduction, se trouve défini ce qu'on doit entendre par *Toupie*. C'est un corps solide soumis à l'action de la pesanteur, dont la masse est répartie symétriquement autour d'un axe du corps et dont un point de l'axe de symétrie est, par un dispositif approprié, assujetti à rester fixe dans l'espace. Tandis que le mouvement de cette toupie à point d'appui fixe se représente à l'aide des fonctions elliptiques, celui de la toupie mobile à plan horizontal,

analogue au jouet d'enfant, ferait intervenir les fonctions hyperelliptiques et il en sera peu parlé dans le cours de l'Ouvrage.

Comme nous l'avons déjà dit, l'étude de la toupie est pour MM. Klein et Sommerfeld, l'occasion de reprendre à leur début les principales théories de la Mécanique et les pages consacrées aux principes et aux généralités sont souvent les plus intéressantes.

Dans le premier fascicule, en particulier, le problème de la toupie est très délaissé. Il ne dérobe qu'un tout petit nombre de pages à un exposé extrêmement instructif des principales notions de Cinématique et de Cinétique (celle-ci comprend la statique et la théorie de l'impulsion) qui trouveront plus tard leur application à l'étude du mouvement de la toupie.

Le premier Chapitre est consacré aux problèmes généraux sur le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe dans l'espace. Très brièvement et avec une parfaite clarté, sont présentées la notion d'axe instantané de rotation et la synthèse du mouvement de rotation à l'aide de cônes roulants (polhodie et herpolhodie). Ne perdant pas de vue les réalités physiques, et toujours soucieux de *faire voir* les résultats mécaniques, MM. Klein et Sommerfeld indiquent l'ingénieuse méthode de Maxwell qui rend visible le mouvement de l'axe instantané dans le corps solide, grâce à un cercle divisé en quatre secteurs colorés et fixé sur l'axe du corps tournant. On trouve ensuite la représentation analytique des rotations autour d'un point fixe, qui conduit naturellement à la théorie des substitutions orthogonales, à l'introduction des trois angles d'Euler θ, φ, ψ fixant univoquement la portion du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe. Enfin la substitution

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, \qquad \beta = i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}},$$

$$\gamma = i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, \qquad \delta = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}}$$

fait correspondre à toute substitution orthogonale ou à toute rotation autour d'un point fixe quatre paramètres α, β, γ, δ dépendant de quatre variables réelles et liées par la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. L'introduction de ces paramètres α, β, γ, δ semble bien arbitraire; c'est pourquoi les auteurs en donnent immédiatement une signification géométrique; la considération des points situés à une dis-

tance nulle du centre de rotation permet de présenter d'une manière naturelle et logique la relation qui existe entre les rotations autour d'un point et les substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. L'emploi de ces variables α, β, γ, δ dans le cas des rotations finies et quelques considérations relatives aux rotations infiniment petites précèdent une étude complète du cas de la précession régulière avec examen des différentes circonstances possibles et solution détaillée d'une application numérique. Les questions relatives aux paramètres α, β, γ, δ, dépendant de quatre variables réelles A, B, C, D liées par la relation

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1,$$

sont trop voisines de la théorie des quaternions pour que MM. Klein et Sommerfeld passent celle-ci sous silence. « Malgré qu'elle ne soit pas jeune », cette théorie n'en est pas moins intéressante, surtout lorsqu'elle est présentée élémentairement au point de vue géométrique qui est adopté dans la *Théorie de la Toupie*.

Le Chapitre II contient une introduction à la *Cinétique*, c'est-à-dire à la Statique et à la Théorie de l'impulsion. C'est certainement l'un des plus instructifs et des plus remarquables de l'Ouvrage, encore que les idées qui y sont développées au début ne soient pas au-dessus de toute discussion et de toute critique; mais ne discutera-t-on pas toujours sur l'origine des notions de force et de masse. Les auteurs admettent que la tension musculaire est l'origine de la notion de force qu'ils regardent, d'ailleurs, ainsi que la notion de masse, comme données *a priori*. Un examen des forces qui agissent dans la nature les conduit à distinguer : les forces *continues* agissant pendant un temps fini et les forces *instantanées*, dont la théorie correspond à celle des percussions. D'ailleurs, la différence entre ces deux espèces de forces n'est pas irréductible; une force continue de plus en plus grande agissant pendant un temps de plus en plus petit devenant à la limite une force instantanée. Certaines définitions diffèrent un peu de celles qui sont courantes en France; c'est ainsi que l'*impulsion* (Impuls) d'un point en mouvement est définie comme identique à la force instantanée qui ferait passer ce point matériel de l'état de repos à

son état de mouvement actuel; c'est notre *quantité de mouvement* définie d'une manière moins analytique, en apparence tout au moins.

La Cinétique du point (travail, force vive, équations de Lagrange) est rapidement traitée. Ensuite, la statique du corps solide est exposée toujours avec le même souci d'insister beaucoup sur les définitions et les notions fondamentales. Les deux théories de Poinsot et de Lagrange sont développées et les principaux résultats appliqués au problème de la toupie. MM. Klein et Sommerfeld effectuent la réduction d'un système de forces et définissent la résultante générale, le couple résultant, la vis de force, etc. Le cas des forces instantanées (et des quantités de mouvement) conduit à l'étude de l'impulsion d'un corps solide libre. Cette impulsion est, par définition, identique au système de forces instantanées qui feraient passer le corps du repos à son état de mouvement actuel. Elle est, dans le cas général, équivalente à une *vis de percussion* et, dans le cas de la toupie, à un *couple de percussion*. La détermination de ces éléments : vis ou couple de percussion, effectuée d'une manière générale, précède le théorème des forces vives et une étude de la toupie symétrique (deux moments d'inertie égaux) avec discussion des différents cas qui peuvent se présenter. Enfin, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, le mouvement étant susceptible d'une représentation géométrique, les principaux résultats de Poinsot sont établis. Un paragraphe est consacré à l'étude de la stabilité de l'axe de rotation d'une toupie tournant très rapidement.

Le Chapitre III traite des équations d'Euler et de divers problèmes en relation avec le mouvement de la toupie ou celui du corps solide libre ou assujeti à certaines conditions. Ceux-ci permettent à MM. Klein et Sommerfeld de continuer l'exposé des notions fondamentales de Cinétique, déjà commencé dans le Chapitre précédent, et de développer des considérations extrêmement instructives relatives aux équations de la Mécanique, au principe de d'Alembert, au théorème de Coriolis, etc.

Les équations d'Euler sont établies à la manière de Saint-Guilhem et d'Hayware en utilisant la représentation vectorielle de l'axe du couple des quantités de mouvement et les dérivées géométriques de ce vecteur-axe mobile : 1° par rapport au trièdre fixe,

2° par rapport aux axes mobiles, c'est-à-dire par rapport au corps solide en mouvement. Dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, on est ramené à intégrer un système de six équations différentielles : les trois équations d'Euler et les trois équations qui donnent les expressions des rotations p, q, r en fonction des trois angles d'Euler θ, φ, ψ et de leurs dérivées premières par rapport au temps. L'intégration s'effectue complètement et avec une grande simplicité. MM. Klein et Sommerfeld reprennent alors la question en formant les équations de Lagrange relatives aux angles d'Euler, ce qui leur permet de faire apparaître la raison intime de l'extrême simplicité de l'intégration précédente : la position du corps solide dans l'espace n'intervient pas dans les équations d'Euler, tandis qu'il en va tout autrement dans le cas où il y a des forces extérieures. C'est l'occasion d'une courte digression sur les problèmes de Mécanique où des circonstances analogues peuvent se présenter, et l'on voit intervenir les théories de Sophus Lie sur les groupes de transformations.

Lorsque certains points du corps solide sont assujettis à suivre un chemin déterminé, par exemple lorsqu'une des droites du corps doit décrire un cône, MM. Klein et Sommerfeld sont conduits à parler du principe de d'Alembert et ils consacrent quelques pages aux conditions d'applicabilité de ce principe. Ils sont également amenés à étudier les résistances. Cette étude est faite en détails dans le cas de la précession régulière, en décomposant la résistance totale en *résistance d'accélération* (Accelerationswiderstand) et *résistance de déviation* (Deviationswiderstand), ce qui conduit les auteurs à parler du théorème de Coriolis et du mouvement à la surface de la Terre. Enfin, la description de quelques expériences prouvant l'existence de la résistance de déviation et quelques lignes relatives au mouvement de la toupie, à un ou deux degrés de liberté, terminent ce premier fascicule.

GASTON COTTY.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CASTELNUOVO (GUIDO). — CALCOLO DELLE PROBABILITÀ. (*Calcul des probabilités.*) 1 vol. in-8°, XXIII-373 pages. Milano, Roma, Napoli, Società editrice Dante Alighieri, 1919.

Deux tendances distinctes, sinon opposées, s'affirment dans les ouvrages scientifiques modernes : le souci de la rigueur et de la perfection logique d'une part, et d'autre part la tendance concrète et utilitaire vers les applications.

Ces deux tendances viennent se compléter très heureusement dans le nouvel ouvrage de M. Castelnuovo. La théorie des probabilités est chaque jour plus utile pour l'étude des sciences de la nature : mais son application sera d'autant plus féconde que la logique de ses méthodes sera plus parfaite. Ainsi en pareille matière le point de vue de la rigueur et celui des applications ne sont nullement en contradiction.

C'est ce que l'auteur met en lumière dans une importante Préface, qui reproduit les points essentiels de deux articles publiés en mars et en avril 1918 dans la revue « Scientia », et sur laquelle je donnerai d'abord un rapide aperçu.

La théorie des jeux du hasard a été longtemps le domaine le plus important d'application du calcul des probabilités : aujourd'hui encore, les jeux fournissent des exemples commodes pour l'exposition de certains points. Cependant on pourrait facilement se permettre la coquetterie d'une exposition de la théorie des probabilités tout à fait indépendante de la théorie des jeux.

La théorie des probabilités peut, en effet, être définie *l'étude des variables qui dépendent du hasard :* le hasard a sa loi et bien des lois naturelles se révèlent aujourd'hui comme en étant des conséquences. C'est à Laplace que revient le mérite d'avoir découvert que des causes d'erreur petites et nombreuses peuvent conduire à la loi exponentielle : sa découverte est d'une immense portée.

Les premières applications importantes en ont été faites aux sciences biologiques et à la statistique démographique : c'est à Jacques Bernoulli que remonte l'idée d'assimiler les résultats démographiques aux tirages d'une urne; les travaux de Laplace, puis de Gauss, ont ensuite permis de poser le problème capital du schéma des urnes, qui consiste à rechercher les diverses courbes de fréquence dont un phénomène statistique donné pourrait être la synthèse. Gauss voyait dans ce problème une certaine analogie avec celui des divers termes d'une série de Fourier représentant un phénomène vibratoire. Quelque séduisante que cette analogie puisse paraître, le problème ne paraît pas suffisamment déterminé, et les essais de solution tentés jusqu'à nos jours n'ont pas été satisfaisants.

Les applications les plus modernes de la théorie des probabilités sont relatives à la Physique : la dynamique permet de décrire les états d'un système successifs d'un état initial donné, si les causes agissantes sont simples et bien connues. Il en est malheureusement rarement ainsi. Bien souvent les causes efficientes sont si nombreuses qu'il n'est pas possible d'analyser le phénomène dans tous ses détails. C'est par exemple le cas du mélange de deux poudres homogènes de couleurs différentes dans un vase agité mécaniquement. Ce sont précisément là les conditions d'application de la théorie des probabilités, qui conduit dans le cas du mélange à l'homogénéité statistique de l'ensemble. Le passage de l'état initial du mélange à cet état d'homogénéité est un phénomène irréversible. C'est toujours le caractère des lois d'équipartition, d'importance capitale, auxquelles conduit la théorie des probabilités.

Ainsi le rôle joué par la théorie des probabilités dans les sciences démographiques et les sciences physiques, est de la plus haute importance et l'on peut regretter que l'enseignement n'en soit pas plus répandu. Mais ce n'est pas seulement à cause des applications que cet enseignement mériterait une plus large place : la seule étude logique des diverses théories du calcul des probabilités est utile et féconde.

Il y a bien des points, dans la théorie et dans les applications, qui sont loin d'être acceptés sans difficulté par tous : problèmes dont l'énoncé manque de précision, solutions dont l'enchaînement

logique manque de rigueur sont la cause de scrupules souvent légitimes et l'objet de reproches parfois sarcastiques.

M. Castelnuovo signale dans sa Préface et commente par la suite les erreurs les plus fréquemment commises : erreurs de compréhension du véritable caractère de loi empirique du hasard, abus relatifs aux probabilités continues et aux probabilités des causes, etc.

L'ordre adopté est sensiblement celui des Traités français modernes.

Chapitres I et II. — *Probabilité et fréquence. Probabilités totales et composées.*

A signaler dans ce premier Chapitre l'étude intéressante du postulat fondamental : « La fréquence tend vers la probabilité. » Ce postulat est d'une nature toute différente de celle des postulats de la Géométrie : et le mot « tend » n'y a pas le même sens que dans la définition de la limite en Analyse.

Des observations pleines de sagacité sur l'égale possibilité des cas, sur la notion de probabilité statistique, etc., sont présentées dans la partie du chapitre consacrée aux définitions et aux généralités. Le chapitre se termine par quelques exemples empruntés à la théorie des jeux de hasard, et en particulier le suivant :

Une urne contient a boules blanches et b boules noires; on tire n boules de cette urne; quelle est la probabilité pour qu'il y en ait α blanches et $\beta = n - \alpha$ noires?

L'exposé des deux théorèmes des probabilités totales et composées, qui fait l'objet du Chapitre II, est suivi d'applications à la loi des épreuves répétées : après le cas classique des épreuves identiques l'auteur examine le cas où la probabilité varie d'une épreuve à l'autre.

Le chapitre contient aussi d'autres extensions : la probabilité totale d'événements ne s'excluant pas mutuellement, la probabilité composée d'événements non indépendants : ce dernier cas donne lieu à une loi d'inégalité.

Pour terminer, l'auteur applique les résultats déjà obtenus à l'étude du jeu de rencontre.

Chapitre III. — *Espérance mathématique et valeur moyenne.*

A propos de la notion de valeur moyenne, l'auteur définit ce qu'il appelle *variable éventuelle* (variabile casuale) : c'est une quantité X qui peut prendre diverses valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ selon que se présentent des événements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ s'excluant mutuellement et ayant des probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

La valeur moyenne théorique d'une telle variable est la somme

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

Cette quantité est appelée par certains auteurs *valeur probable*, par d'autres *espérance mathématique:* cette deuxième dénomination est déclarée acceptable, et d'ailleurs conforme à la notion d'espérance mathématique telle qu'elle est exposée en tête du chapitre. Mais l'auteur estime que la première n'est pas sans présenter un danger d'équivoque.

La valeur quadratique moyenne conduit à l'écart quadratique moyen : la valeur de cet écart pour le cas des épreuves répétées se déduit d'une façon simple et directe de la définition; son expression est classique :

$$X = \sqrt{np(1-p)},$$

le nombre total d'épreuves étant n, la probabilité de l'événement considéré étant p.

Le chapitre se termine par deux paragraphes particulièrement intéressants : le premier contient une comparaison de la valeur moyenne théorique de X à la valeur moyenne empirique ou expérimentale Y de la même quantité; et, très simplement, est établie la proportionnalité de la valeur moyenne de $(Y - m)^2$, m étant la valeur moyenne de X, au facteur $\frac{1}{n}$, n étant le nombre des épreuves.

Le deuxième est l'exposé du théorème de Bienaymé-Tchébytcheff : *Si m est la valeur moyenne d'une quantité x, p l'écart quadratique moyen, la probabilité pour que x soit compris entre*

$$m - pt \quad \text{et} \quad m + pt$$

est supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{t^2}$.

Chapitre IV. — *Le problème des épreuves répétées et le théorème de Jacques Bernoulli.*

Partant de l'expression, qu'il écrit

$$y'_\nu = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu},$$

de la probabilité pour que sur n épreuves l'événement de probabilité p se produise ν fois (q étant la probabilité de l'événement contraire), l'auteur recherche la valeur maxima de y_ν. Il introduit ensuite l'écart

$$l = \nu - np,$$

et l'*écart relatif*

$$L = \frac{e}{n}.$$

Le théorème de Jacques Bernoulli se déduit très facilement de celui de Bienaymé-Tchébytcheff, et de même la proposition que l'auteur dénomme *théorème asymptotique de Poisson :*

La probabilité pour que l'écart relatif L *soit inférieur à un nombre donné tend vers la certitude quand le nombre des épreuves augmente indéfiniment.*

Ainsi sont obtenus en 63 pages, d'une manière élémentaire, les résultats les plus importants. L'ensemble des quatre premiers chapitres de l'Ouvrage constitue une introduction particulièrement intéressante pour un lecteur qui ne posséderait que des notions tout à fait élémentaires de mathématiques.

Chapitre V. — *Formules d'approximation.*

L'intérêt fondamental que présente la considération des probabilités des écarts dans les cas d'un nombre très grand d'épreuves entraîne la nécessité de formules d'approximation pour la quantité $n!$

Le Chapitre V se propose : 1° D'indiquer des formules d'approximation se prêtant au calcul numérique et à l'étude élémentaire de la loi des écarts ;

2° D'établir le caractère asymptotique de ces formules ;

3° De préciser l'approximation qu'elles permettent d'obtenir.

La première partie contient l'application de la formule de Moivre-Stirling au problème des épreuves répétées, l'introduction de la notion *d'écart réduit*

$$\lambda = \frac{e}{\sqrt{2npq}},$$

et l'étude de la courbe normale de probabilité

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2\pi^2}.$$

On trouve ainsi tous les résultats classiques.

La deuxième et la troisième partie, moins élémentaires et pouvant être laissées de côté dans une première lecture, traitent de la valeur asymptotique et du degré d'approximation de la formule

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{e^2}{2npq}},$$

ainsi que de la *formule de Laplace*

$$P_{e}^{+e} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

L'étude de la loi des écarts est reprise en fin de chapitre : l'auteur définit l'écart quadratique moyen, l'écart probable ; il calcule la valeur moyenne d'une puissance quelconque de l'écart. Pour terminer, il analyse une vérification expérimentale de la loi des écarts par Czuber.

CHAPITRE VI. — *Le théorème de Bernoulli et la loi empirique du hasard.*

Des résultats du Chapitre V peut se déduire, d'une manière plus savante qu'au Chapitre IV, le théorème de Bernoulli.

L'auteur énonce le théorème sous une forme plus complète en deux parties :

« *La probabilité pour que l'écart absolu reste inférieur en valeur absolue à une limite fixée tend vers zéro quand le nombre des épreuves augmente indéfiniment ; au contraire, la probabilité pour que l'écart relatif reste inférieur en valeur*

absolue à une limite fixée tend, dans les mêmes conditions, vers la certitude. »

La deuxième partie seulement, mais c'est à vrai dire la plus importante, avait été établie déjà.

L'auteur aborde ensuite l'exposé de *la loi du hasard* : très nettement est mise en lumière la pétition de principes qui consisterait à croire que le théorème de Bernoulli établit la loi du hasard.

Non moins nettement est introduite la notion de certitude pratique à laquelle celle-ci peut conduire dans certains cas.

Le dernier paragraphe traite des probabilités de divers ordres et de la théorie des assurances successives.

Chapitre VII. — *La loi normale de probabilité.*

Ce Chapitre est l'un des plus importants de l'Ouvrage. Après avoir défini la loi normale par la formule

$$P_x^{x+dx} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \, dx,$$

l'auteur traite des combinaisons linéaires

$$Z = \alpha X + \beta Y$$

de variables suivant la loi normale, et applique les résultats obtenus à l'étude des tirages de plusieurs urnes.

Il aborde ensuite la question fondamentale de la loi de probabilité des diverses valeurs d'une quantité

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n,$$

somme d'un grand nombre de variables admettant chacune zéro pour valeur moyenne.

C'est Laplace, que la question semble avoir préoccupé pendant plus de trente ans, qui a eu l'intuition géniale que cette loi, en raison des nombreuses irrégularités provenant des variations individuelles, devait être la *loi exponentielle*. Mais sa démonstration n'est pas exempte de critiques, et c'est à l'école de Tchébytcheff que revient le mérite d'avoir établi la loi d'une manière rigoureuse, moyennant des hypothèses restrictives à la vérité très larges sur les possibilités de variation des quantités X_i.

Dans sa préface, M. Castelnuovo reproche aux Traités français modernes, d'avoir méconnu Tchébytcheff; et il estime combler une lacune regrettable en faisant connaître la rigueur toute nouvelle obtenue par l'école russe dans l'exposé de certaines questions importantes.

Chapitres VIII et IX. — *Probabilité du continu et probabilité des causes.*

L'extension de la définition de la probabilité à l'hypothèse d'une infinité continue de cas possibles n'est pas sans exiger quelques précautions. Non seulement ces précautions sont prises dans le chapitre consacré aux probabilités continues, mais l'auteur se limite volontairement à l'étude de quelques exemples simples : position d'un point sur la surface d'une sphère, problème de l'aiguille, etc. Le problème de la roulette et les observations de Poincaré sur l'introduction de fonctions arbitraires constituent la fin du Chapitre VIII.

Le problème de la probabilité des causes est nettement posé par la distinction entre la probabilité *a posteriori* et la probabilité *a priori* : la solution est donnée par la *formule de Bayes*.

Dans quelle mesure la théorie de Bayes permet-elle d'étudier la probabilité d'un événement dont on a observé la fréquence, dans quelle mesure permet-elle d'établir une proposition inverse du théorème de Bernoulli, c'est ce que l'auteur examine ensuite avec un souci de rigueur qu'on ne peut que louer.

Chapitre X. — *Recherches sur les données fournies par le hasard et les résultats statistiques.*

L'auteur aborde avec ce Chapitre l'étude des applications de la théorie des probabilités. La partie la plus importante est consacrée à l'étude des *coefficients de dispersion* de Lexis.

Le carré du coefficient de dispersion d'une série est le rapport du carré de l'écart quadratique moyen

$$\mu'^2 = \frac{1}{m}\Sigma L^2,$$

au demi-carré de l'écart étalon, soit à

$$\mu^2 = \frac{pq}{m}.$$

On a

$$Q^2 = \frac{\mu'^2}{\mu^2}.$$

Les séries fournies par la statistique sont fréquemment *supernormales*, c'est-à-dire ont un coefficient de dispersion plus grand que 1. Quelques-unes sont *normales* : elles sont l'indice de la pureté de la race. Très rarement la dispersion des séries statistiques est *inférieure à la normale*.

Chapitres XI et XII. — *Loi des erreurs d'observation et méthode des moindres carrés.*

La théorie des erreurs d'observation pose *deux questions distinctes*, qui sont examinées successivement.

La première question est d'ordre purement théorique : il s'agit *de la justification de la loi de Gauss*.

L'auteur expose d'abord la démonstration donnée par Gauss lui-même et basée sur le *principe de la moyenne arithmétique*; il indique ensuite la preuve fournie par l'étude des *fonctions d'un très grand nombre de variables*.

Les notions de précision, d'erreur à craindre, la précision d'une mesure obtenue en prenant la moyenne de n mesures, sont étudiées avec soin; le chapitre se termine par l'étude des erreurs sur la position d'un point dans le plan : des exemples numériques nombreux sont analysés en détail.

Le but du Chapitre XII est l'examen de la deuxième des questions envisagées ci-dessus. Celle-ci est d'ordre essentiellement technique : il s'agit indépendamment ou non de la loi de Gauss, d'étudier les procédés spéciaux de détermination de la valeur la plus plausible d'une grandeur, ou de l'expression la plus plausible d'une fonction d'après une série plus ou moins importante de mesures.

Si l'on admet la loi de Gauss et si, d'autre part, on adopte pour valeur la plus plausible la valeur *la plus probable*, on est conduit à définir les poids des observations, et à prendre, par exemple pour une grandeur unique à mesurer,

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

les poids p_i étant proportionnels aux carrés h_i^2 des précisions des diverses observations.

Ce procédé rentre dans la *méthode générale des moindres carrés* de Legendre. Cette méthode est étudiée dans la deuxième partie du chapitre pour le cas général de l'interpolation.

Le dernier paragraphe est consacré à la *méthode des moments*, qui est fournie par l'application de la méthode des moindres carrés au cas de l'interpolation parabolique.

Chapitre XIII. — *Application du calcul des probabilités à la théorie cinétique des gaz.*

Le dernier Chapitre est consacré aux applications du calcul des probabilités dans les sciences physiques et en particulier à la théorie des gaz. Un premier aperçu sur la loi de Maxwell, la représentation dite de l'*extension en phase* utilisée en mécanique statistique, la partie purement dynamique de la théorie avec le théorème de Liouville, fait l'objet des premiers paragraphes. L'auteur revient ensuite plus longuement sur la justification de la loi de Maxwell au moyen de la théorie des probabilités.

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à la représentation géométrique proposée par M. Borel et à la preuve que donne pour la loi de Maxwell la considération de l'indétermination des données.

Appendice. — Quatre Notes d'un caractère purement mathématique ont été mises en appendice pour ne pas alourdir d'une manière excessive l'exposition dans les chapitres.

La première est relative à la formule de Moivre Stirling et au calcul de certaines intégrales définies; la deuxième aux valeurs moyennes des sommes de plusieurs variables.

La troisième, la plus importante, contient un exposé des travaux de Tchébytcheff sur le problème des moments et le théorème fondamental dit de Laplace-Tchébytcheff.

Enfin la quatrième Note est relative aux écarts fortuits dans l'espace à deux dimensions.

R. Delthéil.

BOULIGAND (GEORGES). — COURS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, avec une Préface de *M. Cartan*. 1 vol. in-8. VII-421 pages. Paris, Vuibert. 1919.

L'évolution de la pensée géométrique dans le courant du siècle dernier, évolution qui a sa source dans les immortels travaux d'un géomètre français, Poncelet, a introduit au centre de la Géométrie moderne un point de vue nouveau, à savoir qu'il n'y a pas *une* Géométrie, mais *plusieurs* Géométries, dont chacune a son objet et ses méthodes propres. Pour nous borner au plan, à côté de la Géométrie élémentaire ou *métrique*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement, s'est édifiée la Géométrie *linéaire*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement et une projection cylindrique, puis la Géométrie *projective*, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement et une projection conique ou une perspective. La théorie des axes des coniques appartient à la Géométrie métrique, celle des centres et des diamètres à la Géométrie linéaire, celle des pôles et polaires à la Géométrie projective. Dans un courant d'idées un peu différent s'est édifiée la Géométrie *conforme* ou de l'inversion, qui étudie les propriétés des figures conservées par un déplacement, une homothétie et une inversion.

Historiquement, ces deux Géométries dérivent du tronc commun de la Géométrie élémentaire. Logiquement, elles en sont tout à fait indépendantes : la notion *projective* de rapport anharmonique, par exemple, ne repose qu'en apparence sur la notion *métrique* de longueur. Ce n'est pas ici le lieu de dire comment cette autonomie absolue des différentes Géométries s'est réalisée : elle ne l'a d'ailleurs été que par une évolution assez lente. En fait aujourd'hui, bien loin que la Géométrie projective, par exemple, soit regardée comme un chapitre particulier de la Géométrie métrique, c'est plutôt le contraire qui est exact : les propriétés *métriques* d'une figure ne sont que les propriétés *projectives* de la figure plus complète formée de la figure donnée et de deux points particuliers, les points cycliques à l'infini.

L'évolution dont il vient d'être question s'est faite parallèlement en Géométrie pure ou synthétique et en Géométrie analytique, les progrès de l'une réagissant sur ceux de l'autre et réci-

proquement. L'autonomie des différentes Géométries se traduit en Géométrie analytique dans les méthodes de calcul, et principalement dans le choix des systèmes de coordonnées utilisées. Si la Géométrie métrique emploie de préférence les coordonnées cartésiennes rectangulaires, la Géométrie linéaire emploie les coordonnées cartésiennes obliques, la Géométrie projective emploie les coordonnées homogènes, trilinéaires ou tétraédrales, et la Géométrie conforme de l'espace emploie les coordonnées pentasphériques, qui ont conduit Darboux à de si beaux résultats. Chacun de ces systèmes de cordonnées repose sur la considération d'une figure de référence type, à savoir le trièdre trirectangle, le trièdre quelconque, le tétraèdre et la figure formée de cinq sphères orthogonales deux à deux. Le passage d'une figure de référence à une autre se traduit par les formules de changement de coordonnées : ces formules jouent un rôle fondamental dans chaque Géométrie, car les propriétés que cette Géométrie étudie sont précisément celles qui sont respectées par tout changement de coordonnées.

La découverte du principe de dualité, qui a habitué les géomètres à regarder l'espace comme engendré par d'autres éléments que des points (droites, plans, sphères, etc.) a élargi le champ d'action de la Géométrie analytique par l'introduction des coordonnées tangentielles, des coordonnées plückériennes, etc. On a été ainsi conduit à constater que des méthodes de calcul identiques s'appliquaient à des théories géométriques très diverses en apparence, et cela a été la source de progrès nouveaux.

Mais ces progrès auraient été paralysés en grande partie si l'on s'était borné à ne considérer que les éléments réels de l'espace, de même que la vraie théorie des équations algébriques serait complètement masquée si l'on ne voulait raisonner que sur des nombres réels. L'introduction en Géométrie des éléments imaginaires s'est donc imposée avec une nécessité croissante. Introduits d'abord d'une manière purement accessoire sous forme de couples de points (ou de droites, etc.) imaginaires conjugués afin de mieux faire comprendre la Géométrie réelle, ils ont à leur tour gagné leur autonomie et sont maintenant étudiés pour eux-mêmes ; certaines Géométries nouvelles, comme la Géométrie *hermitienne*, n'auraient aucun sens sans eux.

De cette évolution complexe et qui n'est sans doute pas encore achevée, on ne voit pas, au moins en apparence, beaucoup de trace dans les programmes de mathématiques spéciales. Cependant ce n'est pas par l'effet du hasard que tous les cours de Géométrie analytique font usage des coordonnées homogènes dans la théorie des pôles et polaires, que tous se servent de coordonnées rectangulaires pour la recherche des axes des coniques et des quadriques, et que tous parlent du cercle imaginaire de l'infini. Il semble donc possible, tout en restant dans les limites du programme, de dégager pour les élèves l'essentiel de ce qui, dans le courant des idées géométriques modernes, peut être mis à leur portée. Plus franchement cela se fera, plus ils en tireront de profit, moins grand sera l'effort de mémoire nécessaire pour s'assimiler les matières du cours; ils seront mieux armés, même pour passer des examens et y réussir, que s'ils sont encombrés de résultats mal reliés entre eux et ne se recommandant souvent que des prédilections, réelles ou supposées, de tel ou tel examinateur.

Le présent cours de Géométrie analytique est une tentative très intéressante de dégager ces idées essentielles dont j'ai parlé. Le but qu'a poursuivi l'auteur est de former l'esprit de l'élève et de se servir des matières à enseigner pour l'aider à acquérir une culture mathématique proprement dite. D'une part, il se maintient strictement dans les limites du programme et n'utilise qu'un appareil analytique très élémentaire : il n'est presque pas fait usage de coordonnées obliques, et la théorie des déterminants n'est supposée connue qu'à la fin du cours. Mais d'autre part, il réussit, dans son Chapitre sur les transformations géométriques, inspiré de la Note classique de M. Borel sur le même sujet, à faire nettement comprendre aux élèves la distinction entre les propriétés métriques, les propriétés linéaires et les propriétés projectives des figures, et à leur montrer comment le choix des coordonnées à employer est lié à la nature des propriétés à étudier. Le rapport anharmonique est introduit à la suite des transformations homographiques de l'espace, de manière à en faire saisir la véritable signification : les propriétés projectives les plus simples des coniques et des quadriques en sont le corollaire. La corrélation et les coordonnées tangentielles servent de base à la théorie des enveloppes et en simplifient l'exposé, tout en initiant l'élève à l'analogie qui existe entre les courbes et les surfaces développables. Enfin, le problème

de l'introduction des éléments imaginaires est abordé franchement, et l'élève est à même de voir comment toutes les notions de la Géométrie réelle s'étendent légitimement aux éléments imaginaires introduits et peuvent être utilisées pour simplifier les démonstrations et, souvent, en faire saisir la véritable signification.

Un autre caractère du présent cours est l'appui que s'y prêtent mutuellement le raisonnement géométrique et le calcul. L'auteur considère, avec juste raison, que la Géométrie pure et la Géométrie analytique ne sont pas deux sciences rivales dont chacune interdit à l'autre d'empiéter sur son domaine; elles gagnent au contraire à s'éclairer l'une par l'autre.

Parmi les parties du Livre qu'il y a lieu plus particulièrement de signaler au lecteur, je citerai l'étude de la forme d'une courbe réelle au voisinage d'un de ses points, avec une démonstration du théorème des fonctions implicites plus simple et plus complète qu'elle n'est donnée d'habitude; — la démonstration du théorème de Bezout, où le nombre des points communs à deux courbes algébriques est obtenu en se ramenant au cas où les deux courbes sont décomposées en deux systèmes de droites, et où l'ordre de multiplicité de chaque point d'intersection est défini soigneusement; — le paragraphe consacré aux courbes algébriques gauches. La partie relative aux courbes et surfaces du second ordre est considérablement allégée, la nature géométrique d'une telle ligne ou surface étant obtenue directement (dans le cas où elle est réelle), et la théorie des diamètres ne venant qu'ensuite. L'intersection de deux quadriques est étudiée assez à fond, et l'attention de l'élève est attirée sur l'importance d'une énumération exacte des conditions d'un problème pour la recherche de la solution.

L'auteur demande beaucoup à la collaboration de l'élève. Cette manière de faire présente des avantages certains pour les bons élèves, mais elle en présente aussi pour les élèves moyens qui seraient guidés par le professeur : l'idéal à réaliser est du reste la collaboration simultanée de l'élève, du livre et du professeur. En l'espèce, le livre rendra service au professeur lui-même; quant à l'élève, il le mettra en mesure d'aborder avec fruit, s'il le désire, la lecture d'ouvrages plus élevés, tels que le beau Livre de Darboux sur les *Principes de la Géométrie analytique*.

E. CARTAN.

MÉLANGES.

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

Par M. A. BLOCH.

A-t-on déjà remarqué que le procédé habituellement employé pour calculer $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ s'applique également aux intégrales de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \cos x^2\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\infty \sin x^2\,dx ?$$

On a

$$I = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \cos \alpha^2 x^2 \alpha\,dx.$$

D'où

$$I e^{-\alpha^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha^2} \cos \alpha^2 x^2 \alpha\,dx.$$

Intégrant par rapport à α entre o et ∞, il vient

$$I \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left| \frac{e^{-\alpha^2}(-\cos\alpha^2 x^2 + x^2 \sin \alpha^2 x^2)}{1+x^4} \right|_0^\infty dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

D'où

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On légitimerait facilement les opérations qui précèdent. Mais, pour concilier la rigueur et la rapidité, il paraît avantageux de recourir à l'artifice suivant $\Big($employé pour $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ dans Méray, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale*, t. III, p. 38$\Big)$.

Posons

$$f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du = \int_0^1 x e^{-x^2 v^2}\,dv;$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \cos u^2\,du = \int_0^1 x \cos x^2 v^2\,dv.$$

On a

$$f'(x) = e^{-x^2}; \qquad \varphi'(x) = \cos x^2.$$

D'où

$$f\varphi' + \varphi f' = \int_0^1 (e^{-x^2v^2} \cos x^2 + \cos v^2 x^2 e^{-x^2}) x \, dv.$$

D'où, en intégrant par rapport à x,

$$f\varphi = c + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2v^2}(-v^2 \cos x^2 + \sin v^2 x^2) - e^{-x^2}(-\cos v^2 x^2 + v^2 \sin x^2)}{1+v^4} \, dv.$$

Faisons $x = 0$, il vient

$$0 = c - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+v^2}{1+v^4} \, dv;$$

d'où

$$c = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Faisons maintenant croître x indéfiniment. On a

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2v^2}(-v^2 \cos x^2 + \sin v^2 x^2) - e^{-x^2}(-\cos v^2 x^2 + v^2 \sin x^2)}{1+v^4} \, dv \right|$$
$$< \int_0^1 (e^{-x^2v^2} + e^{-x^2}) \, dv.$$

Or

$$\int_0^1 e^{-x^2v^2} \, dv < \int_0^\infty e^{-x^2v^2} \, dv = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{x},$$

ce qui tend vers 0. On a donc

$$\lim f(x)\varphi(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

D'ailleurs

$$\lim f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

donc

$$\lim \varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Tout ce qui précède s'applique à

$$J = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx.$$

On trouve, comme on sait, la même valeur.

MÉLANGES.

SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE DE FONCTIONS SPHÉRIQUES;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL.

La méthode exposée dans mon Mémoire *Les problèmes de Cantor et de du Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynomes de Legendre* [1] permet d'obtenir, sur les séries de fonctions sphériques, quelques résultats que je me propose d'établir ci-dessous. Si ces résultats n'ont pas la généralité de ceux que j'ai obtenus pour les séries de polynomes de Legendre [2], cela tient aux difficultés nouvelles qui se présentent pour les fonctions de deux variables et que j'indique dans les paragraphes 6 et 7.

CHAPITRE I.

L'ORDRE DE GRANDEUR DES TERMES D'UNE SÉRIE DE LAPLACE.

1. *Le cas d'une fonction sommable.* — Représentons par $\mathfrak{I}$, Φ les coordonnées polaires d'un point sur la surface S d'une sphère de rayon 1, et par ω la distance sphérique des deux points de coordonnées $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et $(\mathfrak{I}', \Phi')$. Nous savons que

$$\cos\omega = \cos\mathfrak{I}\cos\mathfrak{I}' + \sin\mathfrak{I}\sin\mathfrak{I}'\cos(\Phi - \Phi')$$

et que l'élément d'aire au point $(\mathfrak{I}', \Phi')$ a pour expression

$$d\sigma' = \sin\mathfrak{I}'\, d\mathfrak{I}'\, d\Phi'.$$

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXXI, 1914. Je désignerai les nombreux renvois à ce Mémoire par l'indication du paragraphe ou de la formule précédée du chiffre I.

(2) Les résultats du Mémoire cité ont été considérablement étendus par l'application d'une méthode de M. de la Vallée Poussin. (Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 167, 1918, p. 325.)

$F(\mathfrak{S}, \Phi)$ étant une fonction sommable sur la surface S et $P_n(x)$ représentant, comme d'habitude, le polynome de Legendre de degré n, nous pouvons former tous les termes de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_S F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Nous appellerons cette série, sans rien supposer sur sa convergence, la *série de Laplace* de $F(\mathfrak{S}, \Phi)$. Inversement, étant donnée une série quelconque $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ dont le terme général est une fonction sphérique d'ordre n, nous dirons que cette série possède une fonction *génératrice* $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ si elle est la série de Laplace de $F(\mathfrak{S}, \Phi)$, c'est-à-dire si son terme général vérifie la relation

$$X_n(\mathfrak{S}, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma'. \tag{1}$$

Deux fonctions qui diffèrent sur un ensemble de points de la surface sphérique de mesure non nulle ont leurs séries de Laplace différentes; c'est une conséquence immédiate des résultats relatifs à la sommation d'une série de Laplace par les moyennes de Cesàro du second ordre ou par le procédé de M. de la Vallée Poussin.

Théorème I. — *Si* $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ *est une fonction sommable sur la surface sphérique, on a, uniformément sur cette surface,*

$$\lim_{n=\infty} \int_S F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque et déterminons $h = h(\varepsilon)$, indépendant de $(\mathfrak{S}, \Phi)$ par la condition que l'intégrale de $|F|$ étendue à une calotte de centre (sphérique) arbitraire $(\mathfrak{S}, \Phi)$ et de rayon [sphérique (1)] h soit inférieure à ε, en formule

$$\int_{\omega < h} |F(\mathfrak{S}', \Phi')|\, d\sigma' < \varepsilon.$$

Cela est possible, parce que F est sommable sur S. Décomposons maintenant S en trois parties : une calotte de centre $(\mathfrak{S}, \Phi)$

(1) Comme il ne sera question que de points situés sur la surface sphérique et de distances et d'angles mesurés sur cette surface, nous laisserons dorénavant de côté le mot *sphérique*.

et de rayon h, la calotte symétrique de centre $(\pi-\mathfrak{S}, \Phi+\pi)$ et de rayon h et la zone intermédiaire. Nous aurons, en supposant bien entendu $h < \frac{\pi}{2}$,

$$\int_S F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma'$$
$$= \left(\int_{\omega \leqq h} + \int_{h<\omega<\pi-h} + \int_{\omega \geqq \pi - h}\right) F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Comme $|P_n(\cos\omega)| \leqq 1$, nous aurons, pour la première et la troisième intégrale du second membre,

$$\left| \int_{\omega \leqq h} + \int_{\omega \geqq \pi - h} \right| < 2\varepsilon.$$

D'autre part, la formule asymptotique (2) de I (§ I), relative à P_n, montre l'existence d'une constante $k = k(h)$ telle que $|P_n(\cos\omega)| < \frac{k}{\sqrt{n}}$ dans la zone $h < \omega < \pi - h$. Par suite, quel que soit le point $(\mathfrak{S}, \Phi)$ de la surface sphérique,

$$\left| \int_{h<\omega<\pi-h} F(\mathfrak{S}', \Phi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma' \right| < \frac{k}{\sqrt{n}} \int_S |F(\mathfrak{S}', \Phi')|\, d\sigma'.$$

Il suffira donc de déterminer N par la condition

$$\frac{k}{\sqrt{N}} \int_S |F(\mathfrak{S}', \Phi')|\, d\sigma' < \varepsilon$$

pour voir que l'intégrale qui figure dans l'énoncé du théorème est, en valeur absolue, inférieure à 3ε, pour $n \geqq N$, quel que soit $(\mathfrak{S}, \Phi)$. Le théorème est donc démontré. Il peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème I'. — *Le terme général $X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ de la série de Laplace d'une fonction sommable sur la surface sphérique vérifie, uniformément sur cette surface, la relation*

$$\lim_{n=\infty} \frac{X_n(\mathfrak{S}, \Phi)}{n} = 0.$$

2. *Le cas d'une fonction de carré sommable.* — Lorsque $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ est de carré sommable, c'est-à-dire lorsque $\int_S F^2\, d\sigma$ est

finie, on peut obtenir une estimation plus précise de l'ordre de grandeur, estimation donnée par le théorème :

THÉORÈME II. — *Si* $F(\Xi, \Phi)$ *est une fonction de carré sommable sur la surface sphérique* S, *on a, uniformément sur cette surface,*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n} \int_S F(\Xi', \Phi') P_n(\cos\omega) \, d\sigma' = 0$$

ou le théorème équivalent :

THÉORÈME II'. — *Le terme général* $X_n(\Xi, \Phi)$ *de la série de Laplace d'une fonction de carré sommable sur la surface sphérique vérifie, uniformément sur cette surface, la relation*

$$\lim_{n=\infty} \frac{X_n(\Xi, \Phi)}{\sqrt{n}} = 0.$$

L'identité de Bessel (I, § 3), qui résulte de l'orthogonalité des fonctions sphériques, montre en effet que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int X_n(\Xi, \Phi)^2 \, d\sigma$$

est convergente. Or, la relation fondamentale des fonctions sphériques

$$(2) \qquad X_n(\Xi, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S X_n(\Xi', \Phi') P_n(\cos\omega) \, d\sigma',$$

à laquelle on applique le lemme de Schwarz, montre que

$$X_n(\Xi, \Phi)^2 \leqq \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \int_S X_n^2 \, d\sigma' \int_S P_n(\cos\omega)^2 \, d\sigma' = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S X_n^2 \, d\sigma'$$

et que, par suite,

$$\int_S X_n(\Xi', \Phi')^2 \, d\sigma' \geqq \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\Xi, \Phi)^2.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(\Xi, \Phi)^2}{2n+1}$ est uniformément convergente. Écrivant que son terme général tend vers zéro, nous obtenons le théorème II'.

Une autre conséquence, qui nous sera utile, de la convergence de la série précédente, résulte des inégalités

$$\left(\sum_{n=p}^{q}\left|\frac{X_n}{n(n+1)}\right|\right)^2 \leq \sum_{n=p}^{q}\frac{X_n^2}{2n+1}\cdot\sum_{n=p}^{q}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$

et nous donne le théorème :

Théorème III. — *Si* $X_n(\mathfrak{J}, \Phi)$ *est le terme général de la série de Laplace d'une fonction de carré sommable sur la surface sphérique, la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\mathfrak{J}, \Phi)}{n(n+1)}$ *converge absolument et uniformément sur cette surface.*

Notons, pour terminer, qu'il est impossible de remplacer, dans les théorèmes I' et II', les fonctions n, $\sqrt{n}$ de l'indice par des fonctions monotones à croissance moins rapide. C'est un résultat que l'on pourrait déduire des théorèmes généraux de M. H. Lebesgue sur les intégrales singulières [1].

CHAPITRE II.

L'INTÉGRATION TERME A TERME D'UNE SÉRIE DE LAPLACE.

3. *L'intégration terme à terme sur une calotte.* — Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de montrer qu'une série de Laplace peut être intégrée terme à terme sur une calotte [2]; plus précisément :

Théorème IV. — *Si* $\displaystyle\sum_{n=0} X_n(\mathfrak{J}, \Phi)$ *est la série de Laplace d'une fonction sommable* $F(\mathfrak{J}, \Phi)$, *on a, sur une calotte de centre arbitraire* $(\mathfrak{J}, \Phi)$ *et de rayon arbitraire* r,

$$\int_{\omega \leq r} F(\mathfrak{J}', \Phi')\,d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\omega\leq r} X_n(\mathfrak{J}', \Phi')\,d\sigma'.$$

---

[1] H. Lebesgue, *Sur les intégrales singulières* [*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 3e série, t. I, 1909 (p. 25-117), p. 52 et 55].

[2] Il est probable que l'intégration terme à terme d'une série de Laplace est permise sur des domaines sphériques plus généraux. Mais notre démonstration ne s'étend pas à ce cas général.

La convergence de la série du second membre est uniforme sur toute la surface sphérique relativement à $(\mathfrak{I}, \Phi)$.

Le terme général de la série intégrée terme à terme peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\omega \leq r} X_n(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma' = 2\pi\, X_n(\mathfrak{I}, \Phi) \int_0^r P_n(\cos\rho) \sin\rho\, d\rho.$$

On a, en effet, en tenant compte de la formule (1),

$$\int_{\omega \leq r} X_n(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma' = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\omega \leq r} d\sigma' \int_S F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\, P_n(\cos\omega')\, d\sigma'',$$

en désignant par ω' la distance des points $(\mathfrak{I}', \Phi')$ et $(\mathfrak{I}'', \Phi'')$, et par $d\sigma''$ l'élément d'aire au point $(\mathfrak{I}'', \Phi'')$. La sommabilité de F légitime la permutation des intégrations au second membre, qui devient

$$(3) \qquad \frac{2n+1}{4\pi} \int_S d\sigma''\, F(\mathfrak{I}'', \Phi'') \int_{\omega \leq r} P_n(\cos\omega')\, d\sigma'.$$

Or, si nous représentons encore par ω'' la distance des points $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et $(\mathfrak{I}'', \Phi'')$, et par ψ l'angle au sommet $(\mathfrak{I}, \Phi)$ du triangle sphérique déterminé par les points $(\mathfrak{I}, \Phi)$, $(\mathfrak{I}', \Phi')$ et $(\mathfrak{I}'', \Phi'')$, la formule d'addition des fonctions sphériques (I, § 5) donne dans ce triangle

$$P_n(\cos\omega') = P_n(\cos\omega)\, P_n(\cos\omega'') + \sum_{s=1}^{n} a_{ns}\, P_{ns}(\cos\omega)\, P_{ns}(\cos\omega'') \cos s\psi$$

et permet d'écrire, en remarquant que $d\sigma' = \sin\omega\, d\omega\, d\psi$,

$$(4) \qquad \int_{\omega \leq r} P_n(\cos\omega')\, d\sigma' = \int_0^r d\omega \int_0^{2\pi} P_n(\cos\omega') \sin\omega\, d\psi$$
$$= 2\pi\, P_n(\cos\omega'') \int_0^r P_n(\cos\omega) \sin\omega\, d\omega.$$

Donc

$$(5) \qquad \int_{\omega \leq r} X_n(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma'$$
$$= \frac{2n+1}{4\pi} \int_S F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\, P_n(\cos\omega'')\, d\sigma'' . 2\pi \int_0^r P_n(\cos\omega) \sin\omega\, d\omega$$
$$= 2\pi\, X_n(\mathfrak{I}, \Phi) \int_0^r P_n(\cos\omega) \sin\omega\, d\omega.$$

On sait (I, § 4, form. 4) que

$$\int_0^r P_n(\cos\omega)\sin\omega\,d\omega = \frac{P_{n-1}(\cos r) - P_{n+1}(\cos r)}{2n+1}.$$

Par conséquent, pour $r \neq 0, \pi$, cette expression est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Cela ne suffit pas pour affirmer la convergence de la série dont (5) est le terme général, car de $X_n(\mathfrak{I}, \Phi)$ nous savons seulement que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{X_n(\mathfrak{I}, \Phi)}{n} = 0$. Pour démontrer la convergence uniforme de cette série (qui peut n'être pas absolument convergente), nous devrons donc procéder autrement.

L'expression $\int_{\omega \leqq r} F(\mathfrak{I}', \Phi')\,d\sigma'$ est une fonction du point $(\mathfrak{I}, \Phi)$. Comme c'est une fonction bornée, nous pouvons former sa série de Laplace. Désignons par $Y_n(\mathfrak{I}, \Phi)$ le terme général de cette série,

$$Y_n(\mathfrak{I}, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_S d\sigma'\,P_n(\cos\omega)\int_{\omega' \leqq r} F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\,d\sigma''.$$

Permutons l'ordre des intégrations, ce qui est permis, puisque F est sommable. Il vient

$$Y_n(\mathfrak{I}, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_S d\sigma''\,F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\int_{\omega' \leqq r} P_n(\cos\omega)\,d\sigma'.$$

Un calcul analogue à celui de (4) montre que

$$\int_{\omega' \leqq r} P_n(\cos\omega)\,d\sigma'$$
$$= 2\pi P_n(\cos\omega'')\int_0^r P_n(\cos\omega')\sin\omega'\,d\omega' = \int_{\omega \leqq r} P_n(\cos\omega')\,d\sigma'.$$

Par conséquent, en tenant compte de (3),

$$Y_n(\mathfrak{I}, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_S d\sigma''\,F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\int_{\omega \leqq r} P_n(\cos\omega')\,d\sigma' = \int_{\omega \leqq r} X_n(\mathfrak{I}', \Phi')\,d\sigma'.$$

La série intégrée, dont nous avons à faire l'étude, n'est donc pas autre chose que la série de Laplace de la fonction $\int_{\omega \leqq r} F(\mathfrak{I}', \Phi')\,d\sigma'$. Notre démonstration du théorème IV se ramène donc à celle de la

convergence uniforme de la série de Laplace de $\int_{\omega \leq r} F(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma'$.

4. *La fonction* $\int_{\omega \leq r} F(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma'$. — Nous savons que si une fonction $f(\mathfrak{I}, \Phi)$ possède les propriétés suivantes :

1° Elle est continue sur la surface sphérique;

2° Sa valeur moyenne

$$f(\mathfrak{I}, \Phi; h) = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega = h} f(\mathfrak{I}', \Phi')\, dl'$$

sur un parallèle de pôle $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et de rayon (sphérique) h est une fonction à variation uniformément bornée de h,

$$\int_0^\pi \left| \frac{\partial f(\mathfrak{I}, \Phi; h)}{\partial h} \right| dh < \text{M, indépendante de } (\mathfrak{I}, \Phi);$$

la série de Laplace de $f(\mathfrak{I}, \Phi)$ converge uniformément vers cette fonction sur toute la surface. Il nous suffira donc de montrer que la fonction

$$f(\mathfrak{I}, \Phi) = \int_{\omega \leq r} F(\mathfrak{I}', \Phi')\, d\sigma'$$

vérifie les deux conditions précédentes. La première résulte sans autre de la sommabilité de F. Car, à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que, sur tout ensemble E de points de la surface sphérique, de mesure inférieure à δ, on ait $\int_E |F(\mathfrak{I}, \Phi)|\, d\sigma < \varepsilon$. Il suffit donc de prendre deux points assez voisins pour que les parties non communes des calottes de rayon r ayant ces points comme centres aient une mesure totale inférieure à δ pour en conclure que la différence des valeurs de f en ces deux points est inférieure à ε.

Pour vérifier la seconde, formons la valeur moyenne

$$f(\mathfrak{I}, \Phi; h) = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega = h} dl' \int_{\omega' \leq r} F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\, d\sigma'',$$

où dl' représente l'élément d'arc au point $(\mathfrak{I}', \Phi')$ du parallèle $\omega = h$ de pôle $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et de rayon h, et $2\pi \sin h = \int_{\omega = h} dl'$

le périmètre de ce parallèle. La permutation (légitime à cause de la sommabilité de F) des deux intégrations successives donnera, en désignant par Ω et λ les nouveaux champs d'intégration,

$$f(\mathfrak{S}, \Phi; h) = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_\Omega d\sigma'' \mathrm{F}(\mathfrak{S}'', \Phi'') \int_\lambda dl' = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_\Omega \lambda \mathrm{F}(\mathfrak{S}'', \Phi'') d\sigma''.$$

Ω est le domaine des points $(\mathfrak{S}'', \Phi'')$ dont la distance au parallèle $\omega = h$ est (en valeur absolue) $\leqq r$; λ est l'arc formé par les points $(\mathfrak{S}', \Phi')$ de ce parallèle, dont la distance ω' au point $(\mathfrak{S}'', \Phi'')$ est $\leqq r$. Les nouveaux champs d'intégration dépendent, quant à leur forme et leur grandeur, des grandeurs relatives de h et r. Supposons, pour fixer les idées, que $r < \frac{\pi}{2}$. Il se présentera alors les cas suivants. Si $0 < h \leqq r$, ou si $\pi - r \leqq h < \pi$, Ω se réduit à une calotte de rayon $h + r$ et de centre $(\mathfrak{S}, \Phi)$ dans le premier cas, de rayon $\pi - h + r$ et de centre $(\pi - \mathfrak{S}, \Phi + \pi)$ dans le second cas. Si $r < h < \pi - r$, Ω est la zone comprise entre les deux parallèles $\omega = h - r$ et $\omega = h + r$. Dans les deux premiers cas ($0 < h \leqq r$ et $\pi - r \leqq h < \pi$), l'arc λ comprend tous les points du parallèle $\omega = h$ lorsque la distance ω'' des points $(\mathfrak{S}'', \Phi'')$ et $(\mathfrak{S}, \Phi)$ est $< r - h$ (premier cas) ou $> 2\pi - (n + h)$ (deuxième cas). $\int_\lambda dl'$ est donc alors égale au périmètre $2\pi \sin h$ du parallèle. Dans les autres cas [$r < h < \pi - r$; $h \leqq r$, $\omega'' > r - h$; $h \geqq \pi - r$, $\omega'' < 2\pi - (r + h)$], la longueur $\lambda = \int_\lambda dl'$ se détermine par les considérations suivantes. Soit $(\mathfrak{S}_1, \Phi_1)$ un des deux points du parallèle $\omega = h$ qui soit à la distance r du point $(\mathfrak{S}'', \Phi'')$. Le triangle sphérique des points $(\mathfrak{S}, \Phi)$, $(\mathfrak{S}_1, \Phi_1)$, $(\mathfrak{S}'', \Phi'')$ a au point $(\mathfrak{S}, \Phi)$ un angle dont la grandeur s'exprime aisément en fonction de λ et est égale à $\frac{\lambda}{2 \sin h}$. La trigonométrie donne donc dans ce triangle

$$\cos r = \cos h \cos \omega'' + \sin h \sin \omega'' \cos \frac{\lambda}{2 \sin h}.$$

Par suite,

$$\lambda = 2 \sin h \arccos \left[\frac{\cos r - \cos h \cos \omega''}{\sin h \sin \omega''} \right].$$

En distinguant les différents cas, selon les formes de Ω et les grandeurs de λ, il viendra donc :

Pour $0 < h \leqq r$.

$$f(\mathfrak{Z}, \Phi; h) = \int_{\omega'' \leqq r-h} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\sigma'' + \frac{1}{\pi}\int_{r-h<\omega''<r+h} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'') \arccos \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''}\, d\sigma''.$$

Pour $r < h < \pi - r$.

$$f(\mathfrak{Z}, \Phi; h) = \frac{1}{\pi}\int_{h-r<\omega''<h+r} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'') \arccos \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''}\, d\sigma''.$$

Pour $\pi - r < h < \pi$.

$$f(\mathfrak{Z}, \Phi; h) = \frac{1}{\pi}\int_{h-r<\omega''<2\pi-(r+h)} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'') \arccos \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''}\, d\sigma'' + \int_{\omega'' \geqq 2\pi-(r+h)} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\sigma''.$$

Pour $r \geqq \frac{\pi}{2}$, il peut arriver que le domaine Ω, qui sera encore une calotte ou une zone, se recouvre en partie; on arrivera cependant encore à des formules du type des précédentes.

Les termes

$$\int_{\omega'' \leqq r-h} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\sigma'', \quad \int_{\omega'' > 2\pi-(r+h)} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\sigma''$$

sont des fonctions de h ayant par rapport à h des dérivées sommables dont elles sont des intégrales. On s'en rend compte en les exprimant comme succession de deux intégrales simples. On a, pour la première, par exemple, en notant $d\sigma'' = \sin\omega''\, d\omega''\, d\chi$,

$$\int_{\omega'' \leqq r-h} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\sigma'' = \int_0^{r-h} du \sin u \int_{\omega''=u} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'')\, d\chi.$$

Il suffira donc de montrer que les fonctions du type

$$\mathrm{G}(h) = \frac{1}{\pi}\int_{h-r<\omega''<h+r} \mathrm{F}(\mathfrak{Z}'', \Phi'') \arccos \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''}\, d\sigma''$$

possèdent une dérivée sommable dont elles sont l'intégrale, pour conclure que $\int_0^\pi \left|\frac{\partial f(\mathfrak{Z}, \Phi; h)}{\partial h}\right| dh$ est bornée.

5. *L'intégrale* $G(h)$. — Nous aurons besoin, pour son étude, du lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $f(t)$ *une fonction sommable dans l'intervalle* $(0, \pi)$; $g(h, t)$ *une fonction continue dans le domaine* B $(-r \leqq t \leqq r,\ r \leqq h \leqq \pi - r)$, *sauf peut-être pour* $t = \pm r$, *telle que* $\int_{-r}^{r} |g(h, t)|\,dt$ *soit une fonction continue de* h *dans l'intervalle* $r \leqq h \leqq \pi - r$ *et que* $\frac{\partial |g(h, t)|}{\partial h}$ *soit sommable* (*superficiellement*) *dans le domaine* B. *Sous ces hypothèses,* $\int_{-r}^{r} f(h+t)\,g(h, t)\,dt$ *est une fonction sommable de* h *dans l'intervalle* $(r, \pi - r)$.

Nous remarquerons que, d'après un théorème de Fubini sur les intégrales doubles, les deux expressions suivantes, obtenues par intégrations simples successives permutées,

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{r}^{\pi-r} dh \int_{-r}^{r} |f(h+t)\,g(h,t)|\,dt, \\ \displaystyle\int_{-r}^{r} dt \int_{r}^{\pi-r} |f(h+t)\,g(h,t)|\,dh, \end{cases}$$

existent ou n'existent pas en même temps. De l'existence de la première résulterait que $\int_{-r}^{r} |f(h+t)\,g(h, t)|\,dt$ est une fonction sommable de h, et *a fortiori* l'exactitude du lemme. Nous montrerons que la seconde expression (6) existe. Partons pour cela de l'intégrale simple $\int_{r}^{\pi-r} |f(h+t)\,g(h, t)|\,dh$ qui existe certainement, sauf peut-être pour $t = \pm r$, puisque g est pour les autres valeurs de t une fonction bornée de h et que $f(h+t)$ est une fonction sommable de h (le produit d'une fonction sommable par une fonction bornée est encore sommable). En l'intégrant par parties, elle devient

$$\int_{r}^{\pi-r} |f(h+t)\,g(h,t)|\,dh = |g(\pi-r, t)| \int_{r}^{\pi-r} |f(h+t)|\,dh$$
$$- \int_{r}^{\pi-r} dh\, \frac{\partial |g(h, t)|}{\partial h} \int_{r}^{h} |f(u+t)|\,du$$
$$(t \neq \pm r).$$

Au second membre, chacun des termes est une fonction sommable de t dans $(-r, +r)$. Le premier est, en effet, le produit d'une fonction sommable de t : $|g(\pi - r, t)|$ par une fonction bornée de t. Le second est sommable par rapport à t, parce que l'intégrale superficielle

$$\int\int_{B} \frac{\partial |g(h, t)|}{\partial h} \int_{r}^{h} |f(u+t)|\, du\, dh\, dt$$

du produit d'une fonction bornée dans B par la fonction $\dfrac{\partial |g|}{\partial h}$ sommable dans B existe. Le premier membre est donc une fonction sommable de t, ce qui assure l'existence de la seconde expression (6).

Nous aurons à appliquer ce lemme en prenant pour $g(h, t)$ la fonction $\dfrac{\partial \lambda(h, t)}{\partial t}$, où

$$\lambda(h, t) = \arccos \frac{\cos r - \cos h \cos(h+t)}{\sin h \sin(h+t)}, \tag{7}$$

et pour $f(t)$ le produit de $\sin t$ par la valeur moyenne $F(\mathfrak{I}, \Phi; t) \equiv F(t)$ de F sur le parallèle de centre $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et de rayon t

$$F(\mathfrak{I}, \Phi; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega''=t} F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\, d\chi, \tag{8}$$

χ désignant l'angle que font au point $(\mathfrak{I}, \Phi)$ un grand cercle fixe et le grand cercle des points $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et $(\mathfrak{I}'', \Phi'')$. $F(t) \sin t$ remplit évidemment les conditions du lemme, puisque

$$\int_{S} F(\mathfrak{I}'', \Phi'')\, d\sigma'' = 2\pi \int_{0}^{\pi} F(t) \sin t\, dt.$$

Un calcul qui ne présente aucune difficulté fait voir que $\dfrac{\partial \lambda(h, t)}{\partial t}$ est une fonction continue dans B, sauf pour $t = \pm r$, qu'il en est de même de $\dfrac{\partial^2 \lambda(h, t)}{\partial h\, \partial t}$ et que ces deux fonctions deviennent infinies pour $t = \pm r$ comme $\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}$. Comme $\dfrac{\partial \lambda(h, t)}{\partial t}$ ne change de signe que sur une seule ligne du domaine B, on conclut aisément que $\dfrac{\partial}{\partial h} \left| \dfrac{\partial \lambda(h, t)}{\partial t} \right|$ est sommable dans B et que toutes les autres conditions du lemme sont remplies.

Transformons $G(h)$ en introduisant $d\sigma'' = \sin\omega''\, d\omega''\, d\chi$ et en tenant compte de la notation (8)

$$G(h) = \frac{1}{\pi}\int_{h-r}^{h+r} d\omega'' \int_0^{2\pi} F(\Xi'', \Phi'')\, \text{arc cos}\, \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''} \sin\omega''\, d\chi$$

$$= 2\int_{h-r}^{h+r} F(\omega'')\sin\omega''\, \text{arc cos}\, \frac{\cos r - \cos h \cos\omega''}{\sin h \sin\omega''}\, d\omega''.$$

Intégrons par parties et remarquons que arc cos s'annule pour $\omega'' = h \pm r$,

$$G(h) = -2\int_{h-r}^{h+r} du \int_h^u F(\omega'')\sin\omega''\, d\omega''\, \frac{\partial}{\partial u}\, \text{arc cos}\, \frac{\cos r - \cos h \cos u}{\sin h \sin u}.$$

Le changement de variable $u = h + t$ donne enfin, en introduisant l'abréviation (7),

$$G(h) = -2\int_{-r}^{r} dt\, \frac{\partial\lambda(h, t)}{\partial t} \int_h^{h+t} F(\omega'')\sin\omega''\, d\omega''.$$

Nous sommes maintenant à même de montrer que $G(h)$ est l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable de h et que l'on a

$$(9) \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial h} = \int_{-r}^{r} F(h+t)\sin(h+t)\, \frac{\partial\lambda(h, t)}{\partial t}\, dt + \int_{-r}^{r} dt\, \frac{\partial^2\lambda(h, t)}{\partial h\, \partial t} \int_h^{h+t} F(\omega'')\sin\omega''\, d\omega''.$$

Nous démontrerons pour cela que le second membre de (9) est sommable en h, et que son intégrale prise entre r et h est égale à $-\frac{1}{2}[G(h) - G(r)]$. Le premier terme du second membre est sommable en vertu du lemme; le second, parce que $\frac{\partial^2\lambda}{\partial h\, \partial t}$ est sommable dans B et que son facteur est une fonction bornée dans B. En intégrant le second membre entre r et h, nous aurons donc

$$(10) \qquad \int_r^h du \int_{-r}^{r} F(u+t)\sin(u+t)\, \frac{\partial\lambda(u, t)}{\partial t}\, dt + \int_r^h du \int_{-r}^{r} dt\, \frac{\partial^2\lambda(u, t)}{\partial u\, \partial t} \int_u^{u+t} F(\omega'')\sin\omega''\, d\omega''.$$

Retranchons-en la quantité nulle [parce que $\lambda(u, -r) = \lambda(u, +r) = 0$] presque partout.

$$\int_{-r}^{r} F(u)\sin u\,\frac{\partial\lambda(u,t)}{\partial t}\,dt = F(u)\sin u\int_{-r}^{r}\frac{\partial\lambda(u,t)}{\partial t}\,dt,$$

préalablement intégrée entre les mêmes limites r, h. Il vient alors, pour (10),

$$\int_{r}^{h} du\int_{-r}^{r}[F(u+t)\sin(u+t) - F(u)\sin u]\,\frac{\partial\lambda(u,t)}{\partial t}\,dt$$
$$+\int_{r}^{h} du\int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial^2\lambda(u,t)}{\partial u\,\partial t}\int_{u}^{u+t} F(\omega'')\sin\omega''\,d\omega'',$$

et par permutation des intégrations

$$\int_{-r}^{r} dt\int_{r}^{h}[F(u+t)\sin(u+t) - F(u)\sin u]\,\frac{\partial\lambda(u,t)}{\partial t}\,du$$
$$+\int_{-r}^{r} dt\int_{r}^{h} du\,\frac{\partial^2\lambda(u,t)}{\partial u\,\partial t}\int_{u}^{u+t} F(\omega'')\sin\omega''\,d\omega''.$$

Intégrons par parties dans le premier terme; il devient

$$\int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(h,t)}{\partial t}\int_{r}^{h}[F(u+t)\sin(u+t) - F(u)\sin u]\,du$$
$$-\int_{-r}^{r} dt\int_{r}^{h} du\,\frac{\partial^2\lambda(u,t)}{\partial u\,\partial t}\int_{r}^{u}[F(\xi+t)\sin(\xi+t) - F(\xi)\sin\xi]\,d\xi;$$

si nous tenons compte de

$$\int_{r}^{u}[F(\xi+t)\sin(\xi+t) - F(\xi)\sin\xi]\,d\xi$$
$$= \int_{u}^{u+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi - \int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi,$$

et de la relation analogue obtenue en prenant $u = h$, (10) deviendra, simplifications faites,

$$\int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(h,t)}{\partial t}\int_{h}^{h+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi - \int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(h,t)}{\partial t}\int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi$$
$$+\int_{-r}^{r} dt\int_{r}^{h} du\,\frac{\partial^2\lambda(u,t)}{\partial u\,\partial t}\int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi.$$

La première intégrale n'est autre que $-\frac{1}{2}G(h)$. Si, dans la troisième, nous permutons l'ordre des intégrations, elle deviendra

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} dt \int_{r}^{r+t} d\xi\, F(\xi)\sin\xi \int_{r}^{h} \frac{\partial^2\lambda(u,t)}{\partial u\,\partial t}\,du \\
&= \int_{-r}^{r} dt \int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi \left[\frac{\partial\lambda(u,t)}{\partial t}\right]_{u=r}^{h} d\xi \\
&= \int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(h,t)}{\partial t}\int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi - \int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(r,t)}{\partial t}\int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi \\
&= \int_{-r}^{r} dt\,\frac{\partial\lambda(h,t)}{\partial t}\int_{r}^{r+t} F(\xi)\sin\xi\,d\xi + \frac{1}{2}G(r).
\end{aligned}$$

(10) se réduit donc à $-\frac{1}{2}[G(h) - G(r)]$. La formule (9) ainsi vérifiée montre ensuite sans difficulté que $\int_{r}^{\pi-r}\left|\frac{\partial G(h)}{\partial h}\right| dh$ est inférieure à une constante indépendante du point $(\mathfrak{S}, \Phi)$. Il en est donc de même de $\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\partial f(\mathfrak{S}, \Phi; h)}{\partial h}\right| dh$. Le théorème IV est ainsi entièrement démontré.

CHAPITRE III.

LES THÉORÈMES D'UNICITÉ.

6. *La fonction* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\mathfrak{S}, \Phi)}{n(n+1)}$ *et l'analogue d'un théorème de Riemann.* — De la convergence en un point d'une série de fonctions sphériques $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ nous savons, par un lemme classique d'Abel, déduire la convergence en ce point de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\mathfrak{S}, \Phi)}{n(n+1)}$; mais de la convergence de la première série dans tout un domaine ou même sur toute la sphère, nous ne savons rien conclure sur la convergence *uniforme* ou *quasi uniforme* (au sens d'Arzela) de la seconde dans ce domaine ou sur toute la sphère. Comme dans ce qui suit nous aurons besoin de la continuité de la fonction représentée par la seconde série, nous serons

obligés de supposer expressément que cette série converge uniformément. Nous rencontrons ici une difficulté qui ne se présentait pas pour les séries de polynomes de Legendre; nous pouvions alors conclure, de la convergence presque partout d'une série $\Sigma a_n P_n(\cos \Xi)$, la relation $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ de laquelle découle la convergence uniforme de $\sum \frac{a_n P_n(\cos \Xi)}{n(n+1)}$. Le théorème duquel dérive la relation $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ n'a pas d'équivalent connu pour les fonctions $X_n(\Xi, \Phi)$ ou pour les coefficients du développement de $X_n(\Xi, \Phi)$ suivant les fonctions P_{ns}.

Pour établir le théorème fondamental, analogue du théorème IX (I, § 8), nous calculerons d'abord la valeur de

$$\Delta_2 X_n(\Xi, \Phi; h) = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{\omega=h} X_n(\Xi', \Phi')\, dl' - X_n(\Xi, \Phi)$$

pour une fonction sphérique quelconque d'ordre n. Nous partirons pour cela de la relation (2) qui entraîne, par permutation légitime des intégrations,

$$\Delta_2 X_n(\Xi, \Phi; h) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S X_n(\Xi', \Phi') \Delta_2 P_n(\cos \omega; h)\, d\sigma'.$$

Or, nous avons trouvé (I, § 5) que

$$\Delta_2 P_n(\cos \omega; h) = -P_n(\cos \omega)[1 - P_n(\cos h)].$$

Par suite,

$$(11) \qquad \Delta_2 X_n(\Xi, \Phi; h) = -[1 - P_n(\cos h)] X_n(\Xi, \Phi).$$

Nous en déduisons pour le paramètre généralisé de Beltrami, à titre de vérification (I, § 5),

$$(12) \qquad \Delta_2^* X_n(\Xi, \Phi) = \lim_{h=0} \frac{\Delta_2 X_n(\Xi, \Phi; h)}{\sin^2 \frac{h}{2}} = -n(n+1) X_n(\Xi, \Phi).$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LECORNU (Léon). — Cours de Mécanique, professé à l'École Polytechnique. Tome III, 1 vol. grand in-8°, III-668 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1918 (1).

L'auteur nous prévient lui-même dans son Avertissement que les notions traitées dans ce troisième Volume dépassent notablement les limites actuelles de l'enseignement donné à l'École Polytechnique. Actuelles, car il faut prévoir un prochain remaniement des programmes ayant pour effet de faire rentrer dans le cadre classique maintes questions qui encombrent actuellement le seuil des cours de Mécanique appliquée et y occupent une place que l'on préférerait réserver aux questions spéciales que la technique moderne a vu naître et se développer. Il en résultera, par contre-coup, la disparition de certaines questions abstraites qui se sont peu à peu introduites dans l'enseignement et qui présentent un intérêt extra-mécanique. On peut très bien abandonner à leurs lectures personnelles les esprits curieux des idées de cet ordre et alléger le cours de ces développements ingénieux, souvent même profonds, mais peu utiles, et réserver un temps précieux à des questions d'un caractère plus réellement mécanique.

Le simple énoncé des titres généraux des matières traitées par M. Lecornu dans ce troisième Volume donnera déjà une idée de l'esprit dans lequel le savant professeur de l'École Polytechnique a compris ses judicieuses additions.

Livre X : Résistance des matériaux.
Livre XI : Hydraulique.
Livre XII : Thermodynamique.
Livre XIII : Théorie des machines.
Livre XIV : Notions d'aviation.

Nous allons successivement passer en revue chacun de ces cinq Livres.

(1) Voir les *Bulletins*, t. XXXVIII, 1914, p. 272, pour l'analyse du premier volume; t. XL, 1916, p. 109, pour l'analyse du deuxième volume.

Livre X. — *Résistance des matériaux.*

Sous le nom de *Résistance des matériaux* se groupe aujourd'hui un ensemble de questions un peu hétéroclites qui mettent principalement en œuvre une méthode essentiellement géométrique, la Statique graphique, dont l'initiateur fut Culmann et qui, depuis ce savant, s'est puissamment développée sous l'impulsion d'hommes tels que Maxwell, Cremona, Maurice Lévy; on connaît le magistral Ouvrage que ce savant a publié en France sous ce titre.

La Statique graphique, par ses principes, est le lien naturel entre la Statique pure et la Technique. Elle consiste, comme on sait, en des constructions géométriques spéciales qui mettent systématiquement à profit des conceptions dont la rencontre en Statique pure semble de prime abord accidentelle comme le polygone des forces et surtout le polygone funiculaire. La portée générale de la considération simultanée de ces deux polygones ressort déjà dans l'usage que l'on en fait dans la Statique elle-même pour la détermination de la résultante de plusieurs forces coplanaires et pour la construction des moments.

Sur ces mêmes principes et sans données nouvelles se développe l'importante théorie des systèmes réticulaires et plus particulièrement des systèmes triangulés qui trouvent un vaste champ d'applications dans l'établissement des poutres et des fermes métalliques.

L'ensemble des questions qui se rapportent à ces problèmes spéciaux ont été synthétisés par Maxwell et Cremona dans la considération des figures réciproques qui, par un retour fréquent en Géométrie, dépendent des propriétés métriques d'un complexe linéaire. Ces figures sont, en effet, les projections orthogonales, faites sur un plan normal à l'axe central d'un complexe linéaire de figures de l'espace polaires réciproques les unes des autres par rapport à ce complexe.

L'espace restreint dont disposait l'auteur l'a obligé à limiter à quelques pages, qui constituent le premier Chapitre du Livre X, l'exposition des points essentiels de cette féconde doctrine. C'est qu'en effet, la Statique graphique se prête à l'étude de phéno-

mènes d'un autre ordre qui constituent plus réellement ce que l'on convient d'appeler la *Résistance des matériaux;* le champ en est immense.

Toutes les considérations qui précèdent reposent sur l'hypothèse approximative de l'indéformabilité et de l'absolue rigidité des pièces de l'ouvrage constructif étudié, et c'est pourquoi elles ne sortent pas du cadre de la Statique pure. Mais cette conception est très insuffisante, et c'est dans la considération des déformations, localement très petites, des corps que l'on trouve les moyens de calculer les efforts qu'ils subissent et de prévoir les formes qu'il convient de leur donner pour assurer leur résistance.

La théorie de l'élasticité, fondée sur des hypothèses générales, analyse, comme on sait, les déformations locales assez petites pour que leurs carrés, puissances et produits soient négligeables devant les expressions linéaires de ces quantités. De la sorte, les règles pratiques du calcul sont les mêmes pour elles que les règles logiques du calcul des infiniment petits. De là le nom d'*infiniment petites* que, par un abus de mots, on attribue à ces déformations. Mais si la théorie générale de l'élasticité est de nature à satisfaire le mathématicien par la pureté de ses principes, par l'élégance de ses formules qui placent les problèmes d'élasticité sur le même courant analytique qui porte déjà tant d'autres théories de Physique mathématique, elle donne en revanche difficilement satisfaction au technicien qui recherche surtout des résultats numériques, fussent-ils approchés, et qui ne peut tirer aucun parti du résultat formel le plus élégant s'il ne conduit pas à des nombres.

La nécessité d'aboutir a donc suggéré d'essayer d'autres méthodes, fondées sur des hypothèses plausibles, inspirées par les conditions spéciales où se présente chaque question traitée. Au lieu d'une théorie unique, on a ainsi réalisé un ensemble de théories spéciales détachées, qui n'a pas évidemment l'allure philosophique de la théorie de l'élasticité, mais qui, par les facilités des calculs, par leur aptitude à fournir un résultat approché mais suffisant, rachète aux yeux des praticiens une incorrection apparente. On doit donc regarder ces méthodes comme des manières d'approximations qu'il ne faudra pas utiliser sans réserves et qui devront leur valeur à la sagacité apportée dans leur emploi.

On sait du reste que, même si la théorie de l'élasticité peut mener jusqu'au bout une question technique, dans les cas les plus simples, par exemple le problème de Saint-Venant, l'adaptation des hypothèses aux conditions de réalisation matérielle soulève les plus sérieuses difficultés et que, par ce côté, la théorie de l'élasticité elle-même est loin de donner toute satisfaction.

M. Lecornu passe en revue les problèmes usuels de la résistance des matériaux et d'abord la traction et la compression uniformes. Au sujet de la loi de Hooke et des allongements proportionnels, il a bien soin de faire le départage entre les phénomènes réversibles et ceux où se manifeste l'hystérésis; il relate l'influence de la durée sur la production de ces phénomènes. On sait que le rôle du temps et de la durée dans les phénomènes de déformation prend chaque jour plus d'importance; son étude, conduite avec critique, donnera la clé de bien des phénomènes encore obscurs.

L'auteur expose ensuite la théorie des poutres et définit les trois types de déformations auxquels on peut ramener toutes celles que ces pièces peuvent subir. Il établit la formule que M. de Fontviolant a pu déduire de l'application du principe du travail virtuel. Il traite en particulier la flexion d'une poutre droite où se manifestent des concordances avec ce que donnerait la théorie de l'élasticité. On sait qu'en 1901 M. Mesnager a pu appliquer intégralement cette théorie au cas d'une poutre mince. L'auteur ne manque pas d'énoncer l'élégant théorème de réciprocité d'après lequel l'abaissement éprouvé par un point D d'une barre horizontale sous l'influence d'une charge concentrée en un autre point C est égal à celui qu'éprouverait le point C sous l'influence de la même charge concentrée en D.

Signalons encore le calcul des pièces d'égale résistance à la flexion; l'étude de la flexion d'une pièce courbe, celle d'un anneau fermé.

Dans les études précédentes, les déplacements locaux très petits dus aux déformations n'entraînaient que de petits déplacements relatifs de toutes les parties de la pièce. Elles ne comprenaient donc pas les ressorts pour lesquels, malgré la petitesse des déplacements locaux, leur accumulation peut se manifester par des déplacements finis entre des points non voisins. Les principes et les résultats précédents servent de base à cette nouvelle étude

spéciale. L'auteur traite en particulier l'exemple du ressort à lames, celui du ressort spiral et celui du ressort hélicoïdal.

Tandis qu'autour du problème des poutres se groupent les questions de déformation des corps dans lesquels la prédominance d'une dimension autorise l'assimilation à un corps linéaire, autour des plaques viennent se grouper les corps pour lesquels deux dimensions prédominent, malgré qu'encore on ait reconnu que le passage d'une plaque infiniment mince à celui d'une plaque douée d'épaisseur ne se fait pas sans difficultés. Les questions de ce genre ont donné lieu à des travaux d'ordre et de valeur fort différents et soulevé des controverses encore ouvertes. M. Lecornu ne pouvait songer en ce cadre étroit à s'attaquer au problème intégral, il s'est borné au cas d'une plaque circulaire plane, d'épaisseur uniforme, horizontalement placée, uniformément chargée et reposant par son arête inférieure sur un anneau circulaire fixe. M. Mesnager, qui a produit dans cet ordre d'idées de si appréciables travaux, a spécialement traité ce cas. Il est dans la nature des choses que l'on voie se reproduire ici des difficultés du même ordre qu'à propos des conditions de réalisation du problème de Saint-Venant. On peut du reste, ainsi que le montre M. Lecornu, reprendre le problème en y introduisant une hypothèse analogue à celle de la fibre neutre d'une poutre et admettre un feuillet moyen qui se courberait sans extension.

Le phénomène du flambement ou voilement est celui qui se produit dans une tige ou une plaque lorsque, subitement et sans que nulle part la limite d'élasticité se trouve dépassée, des déplacements relatifs finis viennent à se produire sous l'action d'une charge accrue. Il y a, au moment du flambement, rupture brusque de l'équilibre qui maintenait le corps dans le voisinage de la rigidité. Les conditions du flambement sont intéressantes à analyser au point de vue philosophique aussi bien qu'au point de vue technique, et c'est ce que ne manque pas de faire l'auteur avec beaucoup de précision sur l'exemple d'une tige rectiligne. Il montre, par la discussion minutieuse des équations aux limites, comment il se fait que la stabilité de l'équilibre se change en instabilité aussitôt que le rapport des dimensions transversales à la longueur tombe au-dessous d'une certaine limite.

On sait que l'on appelle *hyperstatiques* les systèmes matériels

à liaisons surabondantes; pour ces systèmes, la Statique pure est incapable de fournir les forces de liaison. Ces forces sont pourtant en fait entièrement déterminées, mais on ne peut arriver à les connaître qu'en faisant intervenir les déformations infiniment petites éprouvées par les pièces. M. Lecornu place au seuil de cette théorie le célèbre théorème de Castigliano et les théorèmes de Maxwell et de Ménabréa qui peuvent s'en déduire. Comme exemples simples d'application de ces théorèmes, l'auteur traite le problème de la poutre reposant sur trois points d'appui, dont la solution revêt ici la forme analytique. On sait que la statique graphique en fournit de son côté une solution. L'auteur étend du reste plus loin son étude par la considération des travées solidaires (*alias* poutre continue). Le célèbre théorème de Clapeyron sur les trois moments trouve ici sa place naturelle.

Dans le sixième Chapitre, l'auteur a tenu à exposer les principes essentiels de l'équilibre d'un massif de terre. Il reproduit d'abord la théorie donnée par M. Boussinesq pour les effets d'une charge posée sur un sol horizontal. Le problème dépend, comme on sait, d'un potentiel logarithmique spécial.

L'auteur s'occupe plus loin de la poussée des terres; le rôle essentiel que le frottement joue dans cette question a pour résultat de réduire les conditions d'équilibre à des inégalités dont la discussion conduit à déterminer les circonstances pratiques où se réalise l'équilibre. Signalons encore le calcul d'un mur de soutènement et ce calcul mené jusqu'au bout dans le cas où le talus est limité supérieurement par un plan.

Dans les paragraphes terminaux de ce dixième Livre, l'auteur a abordé une question de grande importance, celle des conditions de résistance des corps dans l'état cinétique. Le cas si simple de l'allongement cinétique d'un fil supportant un poids (allongement cinétique double de l'allongement statique) est déjà de nature à faire ressortir l'importance de ce genre de phénomènes. A cet ordre d'idées, l'auteur rattache la théorie de l'écrasement des crushers dont l'emploi est classique dans les mesures de balistique intérieure. Citons encore l'étude détaillée des vibrations transversales et longitudinales d'une barre, ainsi que de ses chocs longitudinaux et transversaux.

M. Lecornu a clos cet exposé d'ensemble sur les conditions de

résistance des matériaux en donnant un aperçu sur les méthodes expérimentales qui permettent de contrôler les déductions théoriques. Étant donné que certaines hypothèses ne confèrent aux résultats qu'un caractère d'approximation, il importe beaucoup de savoir contrôler la valeur de ces approximations et de prévenir les manifestations dangereuses que les inexactitudes tolérées pourraient introduire. Il faudrait, pour bien faire, repérer avant la mise en charge un grand nombre de points dont on observerait les déplacements relatifs après la charge. C'est bien ainsi que l'on opère, mais en se bornant à quelques points que l'on s'efforce de choisir aussi judicieusement que possible. Par exemple, on mesure la flèche d'un arc, c'est-à-dire l'abaissement sous la charge de sa clef au moment du décintrement. M. Rabut a beaucoup généralisé cette méthode et, sous le nom d'*auscultation*, institué une méthode régulière de contrôle des constructions. Il convient encore de rappeler que M. Carus Wilson a eu l'idée d'utiliser pour la mesure des déformations l'anisotropie acquise par une pièce en verre déformée sous l'action d'une charge. En France, M. Mesnager a réalisé cette méthode en construisant un modèle réduit en verre de l'ouvrage en étude et y observant optiquement les déformations produites par des charges.

Livre XI. — *Hydraulique.*

On peut au sujet de l'Hydraulique répéter ce qui a été dit à propos de la Résistance des matériaux. Là où les théories générales de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique conduiraient à des résultats peu accessibles aux calculs, ou même à des équations rebelles à une véritable intégration, on substitue une méthode spéciale, plus maniable, qui emprunte à l'Hydrodynamique certains de ses moyens et recourant pour le surplus à des hypothèses plausibles suffisamment autorisées par l'expérience, hypothèses qui, en conséquence, ne peuvent avoir de valeur qu'entre certaines limites qu'il ne faut pas perdre de vue. L'Hydraulique étudie les liquides parfaits, sans frottement intérieur appréciable, mais aussi les fluides visqueux. Elle s'applique également à l'étude des gaz et constitue alors la pneumatique.

L'équation de Bernoulli relative aux fluides parfaits est la base

de la théorie cinétique des liquides. Mais, comme le montre l'auteur, l'introduction d'un terme complémentaire permet de l'étendre au cas de la viscosité; ce terme complémentaire est un élément essentiel, c'est la perte de charge. Un caractère de la viscosité, c'est qu'elle exclue la possibilité d'un potentiel de vitesse et qu'elle est génératrice de tourbillons; ces faits sont mis en évidence avec netteté par l'auteur, au moins dans un cas particulier.

M. Lecornu analyse ensuite les mouvements sans perte de charge sensible, comme la veine dans l'orifice en simple paroi, l'ajutage rentrant de Borda. Il expose les éléments de la théorie des déversoirs.

Dans le cas où la perte de charge n'est plus négligeable, il y a lieu de distinguer selon que cette perte est locale comme dans une variation brusque de la section d'une conduite ou bien dans la production d'un coude, et selon que la perte de charge est continue, ainsi que cela arrive par suite des frottements ou de la viscosité. Ici se place naturellement l'étude de l'écoulement de l'eau dans les conduites et particulièrement celle du phénomène du coup de bélier qui a fait et fait encore l'objet de recherches délicates, notamment à l'Institut Électrotechnique de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Signalons encore la circulation dans les canaux, l'effet de ressaut, l'onde solitaire, l'onde d'oscillation et enfin l'action d'un liquide sur un solide, choc d'une veine contre un plan, choc contre un plan, choc contre un hémisphère, paradoxe de du Buat.

Le Chapitre III du Livre XI traite de la Pneumatique. On y trouve en premier lieu les lois de l'écoulement des gaz, question qui, en raison de l'importance qu'y joue la variation de densité et surtout de la part qu'y prennent les phénomènes thermiques, relève en grande partie de la Thermodynamique et ne peut être, en ce chapître, complètement traitée. Suivent ensuite des indications sur la propagation d'un ébranlement dans un tuyau, sur l'onde de choc, sur l'onde permanente. L'auteur analyse successivement l'influence de la viscosité et des frottements sur ces phénomènes et calcule approximativement la chute de pression produite en utilisant une formule expérimentalement vérifiée par M. l'ingénieur Ledoux. Il est à noter que ces considérations

laissent de côté les phénomènes thermiques qui peuvent naître du frottement contre les parois et qui risquent d'être considérables si la vitesse du fluide est assez élevée.

Les phénomènes dus à la résistance de l'air ont acquis dans ces dernières années une importance particulière en raison de leur rôle dans l'aviation et la navigation aérienne en général. On connaît les résultats de M. Eiffel à ce sujet et le procédé expérimental, savamment conçu, qui lui a permis de les obtenir. M. Lecornu relate les principaux résultats de ces expériences concernant l'aire plane frappée normalement ou obliquement, le cas d'un plan tournant, celui de la surface cylindrique, la résistance d'une sphère; il n'oublie pas le si curieux phénomène de Magnus, objet des expériences du colonel Lafay, ni le phénomène de l'autorotation découvert par Riabouchinsky, fondateur et directeur du Laboratoire de Koutchino, près Moscou.

Les expériences sur modèles réduits, qui sont aujourd'hui courantes, appellent quelques explications au sujet de l'application de ces résultats aux appareils réels : M. Lecornu analyse avec précision cette délicate question.

Un dernier Chapitre, consacré aux instruments de mesure, clôt cette partie de l'Ouvrage. On y trouve des indications sur la mesure des vitesses, sur le tube de Pitot, le Venturi, etc.

Livre XII. — *Thermodynamique.*

La Thermodynamique est à la base de trop de questions de Mécanique appliquée pour qu'une bonne place ne lui fût pas réservée dans ce Volume. Le Livre XII qui lui est consacré débute naturellement par l'exposé des deux principes fondamentaux de l'équivalence et de Carnot-Clausius. Le second de ces principes tire, on le sait, ses difficultés de la notion si différemment conçue par les physiciens de la réversibilité. Joseph Bertrand n'a-t-il pas écrit au sujet des transformations irréversibles : « Les phénomènes qui les concernent ne sont ni vrais ni faux, ils n'ont aucun sens. » La nécessité de marcher, qui a déjà suscité les procédés (certains osent dire les expédients) de la Résistance des matériaux et de l'Hydraulique, incitent les ingénieurs et même quelques physiciens à se montrer moins épris de rigueur. La rigueur mathématique

peut bien apparaître au technicien comme un objet de luxe s'il n'y trouve rien de plus que de l'ordre logique et une certaine harmonie formelle. Mais il en est tout autrement lorsque cette rigueur préside à l'établissement d'une notion qui nécessite des hypothèses absolument précises mathématiquement traduites. La rigueur qui consiste à ne vouloir point sortir du champ bien circonscrit de ces hypothèses n'a plus alors un caractère purement formel; elle est, au contraire, si essentielle qu'en dehors d'elle la notion perd tout son sens et s'évanouit. Tel est le cas de l'entropie, et c'est en se plaçant à ce point de vue très juste que Joseph Bertrand a pu écrire sa phrase citée plus haut. Constatons, cette réserve faite, que l'auteur a, sur ce sujet difficile, reproduit tout ce que l'on peut en tirer raisonnablement. Telles sont les inégalités de Potier et de Pellat. En outre, lorsque par une transformation irréversible, on est conduit d'un état A à un état B et que le même résultat pourrait être obtenu en suivant une transformation réversible (condition essentielle), il est permis d'envisager les valeurs de l'entropie en A et en B, dont la considération est légitimée par cette transformation réversible et énoncer alors, par exemple, que l'entropie en B est supérieure à l'entropie en A. C'est grâce à des précautions de ce genre que l'on peut parvenir à établir la notion de l'énergie non compensée qui joue un rôle si important dans les théories de physique.

Le Chapitre III traite spécialement des fluides homogènes : Équation caractéristique; Diagramme de Clapeyron; Diagramme entropique; Lignes adiabatiques; Relations entre les coefficients de chaleur spécifique et l'équation caractéristique; Formule de Clapeyron; Fonctions caractéristiques. Au sujet de ces fonctions, dont l'origine remonte à Massieu et qui se sont développées en Physique sous le nom de *potentiels thermodynamiques*, l'auteur se borne avec raison, aux cas qui sont en connexion avec les futures applications mécaniques.

Le Chapitre IV traite plus particulièrement des gaz parfaits. Signalons la méthode simple par laquelle M. Lecornu rattache l'équation caractéristique de ces corps à la théorie du viriel. Dans un paragraphe spécial consacré aux gaz réels, l'auteur montre comment leur équation caractéristique peut être plus exactement écrite grâce à l'introduction du covolume.

Le Chapitre V traite des vapeurs. On y trouvera, avec les remarques classiques auxquelles donnent lieu la construction d'un isotherme, le palier décroissant de vaporisation, le point critique, une esquisse de la théorie de Van der Waals, ainsi que les équations de ce physicien et leur forme réduite. Suit la calorimétrie des vapeurs saturées.

La question de la vapeur surchauffée est mise au premier rang de l'actualité par les utilisations modernes de la vapeur. Les théories précédentes sont malheureusement inopérantes à son égard. L'auteur rappelle la valeur constante 0,48 attribuée par Regnault au coefficient de la chaleur spécifique sous pression constante, hypothèse inexacte qui a suscité de difficultueuses expériences. Celles de Knoblauch et Jacob à Munich se trouvent relatées par l'auteur. Nous croyons devoir rappeler que, plus récemment, M. Armand Duchesne, élève de M. Dwelshauvers-Déry à Liége, a procédé à d'ingénieuses expériences qui battent en brèche les résultats des physiciens allemands. Ces résultats ont été groupés dans un important Mémoire présenté par M. Duchesne comme Thèse de Doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, en 1910.

Le Chapitre VI a trait à l'écoulement des fluides élastiques en tenant compte de leur état thermique, question qui n'avait pu être traitée qu'incomplètement dans la Pneumatique.

Le Chapitre VII s'occupe des mélanges combustibles et des données que nécessite leur emploi dans les moteurs à combustion interne. Pouvoir calorifique sous volume constant ou sous pression constante; Température et pression de combustion; Loi de combustion.

Enfin, le Chapitre VIII a pour objet la propagation d'une onde plane traitée au point de vue thermodynamique. La loi adiabatique d'Hugoniot (ou de Rankine) est une dominante de cette théorie.

Livre XIII. — *Théorie des machines.*

L'auteur établit d'abord les notions essentielles et définit les termes généralement employés dans cette théorie. Tels sont les récepteurs, travail moteur et travail résistant, travail utile et travail perdu, régime, rendement. Il fait la remarque judicieuse que

parfois le travail utile ne diffère pas de celui absorbé par les résistances passives, comme c'est le cas dans une horloge ou dans le transport horizontal d'un fardeau. Une remarque analogue peut être faite au sujet d'un propulseur constitué, par exemple par un moteur et une hélice aérienne tirant sur un câble au point fixe en développant un certain effort statique. Marcel Deprez a imaginé pour ce cas un élément spécial qu'il a appelé « le prix de l'effort statique ».

Le fait que la plupart des machines présentent un arbre principal tournant engendre naturellement la considération du couple moteur et du couple résistant. Le couple moteur apparaît comme une fonction de la vitesse angulaire et d'un paramètre qui mesure, par exemple, l'ouverture de la valve ou vanne de laquelle dépend la distribution de la force motrice. La construction de courbes appropriées permet d'établir une discussion graphique de la marche de la machine.

L'auteur analyse ensuite l'effet de volant en s'aidant d'un graphique qui met en évidence les variations cycliques du couple moteur et du couple résistant. Des exemples sont donnés tirés des cas de la manivelle à simple effet, de la manivelle à double effet et de la double manivelle à double effet à calage rectangulaire. Un paragraphe spécial est accordé au cas très spécial des moteurs d'aviation; dans ce cas, en effet, le couple résistant dépend non plus de l'angle de position, mais bien de la vitesse angulaire. L'auteur établit son analyse et son graphique en supposant que le couple résistant est proportionnel au carré de la vitesse angulaire.

La question des régulateurs est une des plus essentielles de la théorie des machines. L'auteur lui a apporté lui-même d'importantes contributions. Après avoir défini la fonction de régulateur, M. Lecornu passe à la description des types les plus courants (Watt, régulateurs à ressorts tels que Foucault, Hartnell, régulateurs isochrones de Farcot, Rankine), puis il entreprend une belle étude générale des régulateurs à force centrifuge en s'aidant des diagrammes dont l'emploi est aujourd'hui classique. Nous ne saurions entrer ici dans le détail de cette théorie qui se retrouve du reste dans d'autres publications de l'auteur, mais dont la place était ici tout à fait marquée. M. Lecornu a produit des régulateurs

une étude très soignée, il en a défini avec précision les qualités de puissance, de régularité, de stabilité, il en a calculé les petits mouvements, il s'est occupé de la délicate question de leur fonctionnement au cours d'un changement de régime; enfin, il a étudié après M. Léauté la régulation indirecte et les oscillations à longue période qui s'y manifestent.

Les freins, en tant que producteurs de travail résistant, peuvent jouer le rôle de régulateurs et leur étude est une suite naturelle de celle de ces derniers. L'auteur donne ainsi la théorie du modérateur à ailettes qui tend à uniformiser le mouvement, du frein à lame flexible, du frein hydraulique.

Le frein de Prony et le moulinet du colonel Charles Renard se rapprochent des freins en ce qu'ils sont destinés à développer du travail résistant, mais leur rôle est essentiellement autre, car leur utilisation consiste à mesurer le travail d'un moteur et sa puissance. Ce sont des dynamomètres. L'auteur fournit quelques indications à leur sujet.

Sous le titre général d'*Efforts intérieurs d'une machine*, l'auteur a groupé une série de questions ou de problèmes offrant chacun un intérêt en quelque sorte isolé : Tensions des barres d'attelage d'un train, réactions des arbres tournants, glissement fonctionnel d'une courroie, force d'inertie d'un piston, force d'inertie d'une bielle. Ces dernières questions se lient à la question plus générale de l'équilibrage dont l'auteur expose les principes.

Le Chapitre II traite des moteurs hydrauliques. Il débute par le bélier hydraulique dont l'auteur décrit succinctement le fonctionnement. Viennent ensuite les divers types de roues. L'auteur s'arrête plus longuement sur les turbines qui s'imposent non seulement à cause de la généralisation de leur emploi qui en fait un des plus importants outils de force motrice, mais aussi à cause des circonstances plus délicates de leur marche et de la finesse des théories de la mécanique des fluides qu'elles mettent en jeu. M. Lecornu décrit d'abord brièvement les divers types de turbines existants. Il donne ensuite l'expression du couple moteur et celle de la puissance dans les deux cas d'espèces de turbines : 1° les turbines à impulsion, qui rappellent à certains égards la théorie de la roue Poncelet, et 2° les turbines à réaction. Cet exposé se complète

par une série de remarques sur la poussée axiale, sur le vannage et l'emploi des grandeurs réduites par lesquelles M. Rateau rend possible la comparaison entre les divers types d'appareils.

Le Chapitre III du Livre XIII traite des moteurs thermiques. Il débute par une étude de l'indicateur imaginé par Watt et qui depuis, sous des formes diverses appropriées aux conditions de marche des moteurs et principalement à leur vitesse, permettent d'évaluer le travail accompli dans le cylindre par le fluide évoluant. L'auteur se borne ici à quelques brèves indications sur ce sujet qu'il a traité avec ampleur dans son Ouvrage intitulé : *Dynamique appliquée*. Par la nature des choses, les moteurs thermiques se divisent en deux catégories : les moteurs à combustion externe et les moteurs à combustion interne.

L'auteur aborde l'étude des premiers en posant et discutant la question du choix du fluide. Il montre, en prenant pour terrain de comparaison le cycle de Carnot, l'avantage de la vapeur d'eau sur l'air. Vient ensuite le cycle de Rankine, qui correspond plus exactement que le cycle de Carnot aux circonstances réelles de la marche d'un moteur à vapeur et à cylindre. La question si capitale des pertes est brièvement évoquée : ces pertes, qui se font surtout par la paroi, peuvent provenir également de l'échappement, de l'espace nuisible, du laminage de la vapeur au moment de l'admission. L'auteur passe ensuite à la description des organes constitutifs essentiels de la machine à vapeur à cylindre : tiroir, excentrique, coulisse de Stéphenson, moyens de régulation.

Dans les turbines à vapeur dont l'étude suit, l'énergie du fluide intervient sous la forme cinétique; cependant, dans les turbines dites *à réaction*, la vapeur intervient aussi par sa pression. A ce type se rattachent les turbines Rateau à disposition muticellulaire. Dans les turbines à action, au contraire, la vapeur arrive détendue, mais avec une vitesse considérable; on sait que ces moteurs, inventés par l'ingénieur suédois de Laval, ont été bien perfectionnés par M. Maurice Leblanc.

Ce sujet se termine par de brèves indications sur les chaudières, sur les condenseurs et sur l'injecteur Giffard.

La théorie des moteurs thermiques du second type, ou moteurs à combustion interne, débute par l'établissement d'une formule qui exprime sous une forme générale le rendement. La discussion

de cette formule met sans peine en évidence l'utilité de la compression. L'auteur y fait usage des diagrammes et applique le même procédé à l'étude de l'influence de la vitesse de combustion.

Sont ensuite passés rapidement en revue les moteurs à gaz, à essence, les moteurs Diesel, le réglage des moteurs à explosion, l'équilibrage, les moteurs d'aviation. Signalons, en passant, le curieux problème d'arithmétique que soulève l'allumage des moteurs en étoile.

Livre XIV. — *Notions d'aviation.*

Dans les vingt pages qu'il consacre à l'aviation, dont l'étude a été introduite au programme de l'enseignement de l'École Polytechnique, M. Lecornu a su grouper tout ce qu'il est essentiel de connaître sur cette intéressante matière. Il montre d'abord la nécessité qu'il y a pour la stabilité de l'équilibre à ce que les forces appliquées passent le plus près possible du centre de gravité, en sorte que l'on peut se placer dans l'hypothèse où elles y passeraient réellement. La condition de l'équilibre se ramène donc à la fermeture du polygone des forces. Ces forces se réduisent schématiquement à quatre : 1° le poids P de l'appareil et de ses surcharges ; 2° la poussée due à la force propulsive de l'hélice ; 3° la pression exercée par le vent sur le plan sustentateur ; 4° la pression du vent sur les autres parties de l'aéroplane. La discussion des conditions d'équilibre revient ainsi à celle de la construction d'un quadrilatère dans diverses hypothèses de données. La question peut être du reste traitée aussi par le calcul. L'auteur parvient à mettre en évidence la proposition aperçue par Penaud et par le colonel Charles Renard d'après laquelle : « La force de traction nécessaire à la propulsion d'un aéroplane est un minimum lorsque la résistance du sustentateur est égale à la résistance de l'esquif. » Il démontre de même que la puissance nécessaire à la propulsion et à la sustentation d'un aéroplane est un minimum lorsque la résistance du sustentateur est égale à trois fois la résistance de l'esquif. M. Lecornu entreprend ensuite l'analyse délicate du problème du virage, puis celle de la stabilité. Il mentionne notamment la question de la stabilisation automatique qui a fait l'objet de tant de recherches et d'expériences dont certaines ont eu une terminaison

mortelle. L'auteur donne la description du stabilisateur Doutre qui vise, comme on sait, la stabilité longitudinale.

Nous avons tenu, dans la longue analyse qui précède, à suivre pas à pas le texte du Livre. Le lecteur aura pu se rendre compte ainsi de la variété des matières entreprises par M. Lecornu. Toutes ne pouvaient évidemment être traitées avec l'ampleur correspondant à l'état actuel de leur importance et de leur développement. La grande variété des matières et le cadre forcément restreint où l'auteur s'était placé ne le permettaient pas. Le but, du reste, était autre. Il s'agissait seulement de poser les principes essentiels et d'indiquer l'esprit des méthodes mises en œuvre dans les solutions. Au lieu de rechercher des occasions d'abstraction et de grandes formules générales, l'objectif était plutôt d'inspirer le goût du concret et, par la variété des méthodes, de montrer la souplesse avec laquelle les éléments les plus simples de la Mécanique fournissent la solution des problèmes les plus divers, pourvu que ceux-ci soient bien conçus et bien posés. Les conceptions mécaniques sont ainsi mises au premier plan et l'appareil mathématique volontairement simplifié reprend son rôle véritable qui est de servir et non d'asservir. Il serait bien désirable que cet état d'esprit se généralisât et que l'exemple donné par un maître tel que M. Lecornu fût suivi.

G. Koenigs.

MÉLANGES.

SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE DE FONCTIONS SPHÉRIQUES

(*suite*);

Par M. Michel PLANCHEREL.

Le théorème fondamental s'énonce maintenant :

Théorème V. — *a. Si la suite* $X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ *de fonctions sphériques d'ordre n est telle qu'au point* $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi})$ $\lim_{n=\infty} X_n(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi}) = 0$

et si la série

$$(13)\qquad F(\mathfrak{S}, \Phi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\mathfrak{S}, \Phi)}{n(n+1)}$$

est uniformément convergente au point $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi})$ *et dans son voisinage, on aura*

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta_2 F(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi}; h)}{\sin\frac{h}{2}} = 0.$$

b. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ *converge au point* $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi})$ *et si la série* (13) *est uniformément convergente au point* $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi})$ *et dans son voisinage, on aura*

$$\Delta_2^* F(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi}) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi}).$$

Grâce à la convergence uniforme de (13), on peut permuter les symboles Σ et Δ_2 et écrire

$$(14)\qquad \Delta_2 F(\mathfrak{S}, \Phi; h) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_2 X_n(\mathfrak{S}, \Phi; h)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi) \frac{1 - P_n(\cos h)}{n(n+1)}.$$

La suite de la démonstration est identique à celle donnée dans I (§ 8 et 9). Remarquons encore que l'hypothèse de la convergence uniforme de la série (13) pourrait être remplacée, dans le théorème V, par l'hypothèse moins restrictive que la série $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ converge au point $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\Phi})$ et dans son voisinage et y est intégrable terme à terme sur un parallèle de centre $(\mathfrak{S}, \Phi)$ et de rayon arbitraire h, car alors (14) subsiste.

7. *Le théorème d'unicité.* — Le théorème V nous met à même de démontrer le théorème d'unicité suivant :

Théorème VI. — *Si la série de fonctions sphériques* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ *converge vers zéro sur toute la surface sphérique et si la série*

$$(13)\qquad F(\mathfrak{S}, \Phi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\mathfrak{S}, \Phi)}{n(n+1)}$$

converge uniformément sur toute la surface, on a

$$X_n(\mathfrak{S}, \Phi) = 0.$$

On conclut en effet, du théorème V, que sur toute la surface

$$\Delta_2^* F(\mathfrak{I}, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathfrak{I}, \Phi) = - X_0.$$

X_0 étant une constante, nous pourrons en déduire (I, th. VII) que la fonction continue $F(\mathfrak{I}, \Phi)$ est une solution régulière de l'équation $\Delta u = \text{const.}$ Or, cette équation n'admet de solution régulière sur toute la sphère que lorsque la constante est nulle, et dans ce cas la solution est $u \equiv \text{const.}$ On aura donc

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad F(\mathfrak{I}, \Phi) \equiv \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\mathfrak{I}, \Phi)}{n(n+1)} \equiv \text{const.}$$

Multipliant par $P_k(\cos\omega)$ et intégrant terme à terme sur la surface sphérique (légitime par suite de la convergence uniforme), nous obtiendrons, en tenant compte des relations

$$\int_S X_n(\mathfrak{I}, \Phi) P_k(\cos\omega)\, d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} X_k(\mathfrak{I}', \Phi'), & \text{si } n = k, \end{cases}$$

le résultat $X_k(\mathfrak{I}', \Phi') \equiv 0$.

Le théorème VI est susceptible d'une légère extension. Gardons les hypothèses faites sur $F(\mathfrak{I}, \Phi)$ et supposons que la convergence vers zéro de la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{I}, \Phi)$ soit assurée partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble réductible E : la conclusion $X_n(\mathfrak{I}, \Phi) \equiv 0$ subsiste encore. Car, si $(\overline{\mathfrak{I}}, \overline{\Phi})$ est un point isolé de l'ensemble E, la fonction $F(\mathfrak{I}, \Phi)$ vérifiera encore l'équation $\Delta u = \text{const.}$ au voisinage du point $(\overline{\mathfrak{I}}, \overline{\Phi})$, sauf peut-être en ce point. Or, une solution de $\Delta u = \text{const.}$, régulière dans un domaine qui ne contient pas le point $(\mathfrak{I}', \Phi')$ extérieur à E, est de la forme

$$k \log \sin \frac{\omega}{2} + \text{solution de } \Delta u = 0, \text{ régulière dans le domaine.}$$

$F(\mathfrak{I}, \Phi)$ et $k \log \sin \frac{\omega}{2}$ restant continues au point $(\overline{\mathfrak{I}}, \overline{\Phi})$, il en sera de même de la solution de $\Delta u = 0$. Or, un théorème analogue

au théorème de Laurent [1] permet d'affirmer que si une solution de $\Delta u = 0$ est régulière au voisinage d'un point $(\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\Phi})$ où elle est encore continue, elle est nécessairement régulière en ce point. On conclura donc que $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ est une solution de $\Delta u =$ const., non seulement au voisinage du point $(\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\Phi})$, mais encore en ce point. En étendant de proche en proche ce raisonnement, d'abord aux points isolés de l'ensemble E, puis aux points isolés de ses dérivés successifs, on conclura que $F(\mathfrak{S}, \Phi)$ est une solution de $\Delta u =$ const., régulière sur toute la sphère. Ce résultat obtenu, le raisonnement continue comme plus haut. Nous obtenons ainsi le théorème moins particulier :

Théorème VII. — *Si la série de fonctions sphériques* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ *converge vers zéro sur toute la surface sphérique, à l'exception au plus des points d'un ensemble réductible, et si la série* (13) *converge uniformément sur toute la surface, on a*

$$X_n(\mathfrak{S}, \Phi) \equiv 0.$$

Ce résultat acquerrait un intérêt bien plus grand si nous pouvions ne rien supposer sur la convergence de la série $\Sigma X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ non seulement sur un ensemble réductible de points, mais encore sur des courbes en nombre fini ou infini de la surface sphérique. La difficulté qui se présente dans cette extension consiste à reconnaître si deux solutions de $\Delta u = 0$, définies chacune d'un côté de la courbe d'exception et se raccordant d'une manière continue sur cette courbe, sont le prolongement analytique l'une de l'autre. La difficulté analogue qui se présentait pour les séries de Legendre pouvait être levée, parce que nous connaissions l'existence des dérivées à droite et à gauche de la fonction $F(\mathfrak{S})$ au point commun à deux intervalles contigus et que l'égalité de ces dérivées découlait de la première partie du théorème fondamental (I, th. IX). Or, ici, nous ne savons pas si les solutions de $\Delta u = 0$ ont des dérivées normales de part et d'autre de la courbe d'exception. Nous pourrions nous passer de le savoir si nous pouvions démontrer le *lemme* suivant :

---

[1] *Voir*, par exemple, H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien* (Paris, Gauthier-Villars, 1899), p. 204-211. Le théorème se transpose, convenablement modifié, au potentiel logarithmique et au potentiel sur la surface sphérique.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines sphériques, contigus le long d'un arc de courbe C, et $u(\Im, \Phi)$ une fonction continue dans le domaine somme $\Omega_1 + \Omega_2$ (donc continue sur C). Si la fonction $u(\Im, \Phi)$ est à *l'intérieur* de Ω_1 et à *l'intérieur* de Ω_2 une solution régulière de l'équation $\Delta u = 0$ et si elle vérifie sur C la condition

$$\lim_{h=0} \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \Delta_2 u(\Im, \Phi; h) = 0,$$

elle est encore une solution régulière de $\Delta u = 0$ à l'intérieur du domaine $\Omega_1 + \Omega_2$ (donc sur C).

Je n'ai pu réussir à démontrer ce théorème, qui me paraît vraisemblable et qui entraînerait, par application du théorème VI *b*, l'extension du théorème VII.

8. *L'existence d'une génératrice.* — Le problème de du Bois-Reymond relatif à l'existence de la génératrice d'une série de fonctions sphériques reçoit une solution partielle par le théorème :

Théorème VIII. — *Si la série de fonctions sphériques* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\Im, \Phi)$ *converge, à l'exception au plus des points d'un ensemble réductible, vers une fonction* $f(\Im, \Phi)$ *de carré sommable, bornée sauf peut-être aux voisinages des points d'un ensemble réductible, et si de plus la série*

$$F(\Im, \Phi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)}$$

converge uniformément sur toute la surface sphérique. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\Im, \Phi)$ *est la série de Laplace de* $f(\Im, \Phi)$.

Nous nous bornerons à esquisser la démonstration en renvoyant pour les détails à la démonstration analogue de I (§ 11). En partant de (11), on établira la formule

$$\Delta_2 \left[\int_0^r d\rho \int_{\omega=\rho} X_n(\Im', \Phi')\, d\sigma';\, h \right] = \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} \Delta_2 X_n(\Im', \Phi';\, h)\, d\sigma'$$

$$(0 \leqq r < \pi),$$

analogue à la formule (21) de I (§ II), et l'on en déduira, par suite de la convergence uniforme de $F(\mathfrak{S}, \Phi)$, que

$$\Delta_2\left[\int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} F(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma';\, h\right] = \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} \Delta_2 F(\mathfrak{S}', \Phi';\, h)\, d\sigma'.$$

En remarquant ensuite que $\int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n(n+1)}$, on conclut la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_{\omega \geqq \rho} X_n(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma' = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi) \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$$

en tout point où $X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ est une fonction bornée de l'indice, en particulier donc en tout point de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi)$. Le théorème VI *b*, appliqué à la fonction

$$\int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} F(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma',$$

donnera, en tout point de convergence de ΣX_n,

$$\Delta_2^* \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} F(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma' = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} X_n(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma'.$$

L'application du théorème VI de I (§ 6) à

$$\Delta_2^* F(\mathfrak{S}, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\mathfrak{S}, \Phi) = f(\mathfrak{S}, \Phi) - X_0$$

donnera enfin la relation

$$(15) \qquad \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} f(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} X_n(\mathfrak{S}', \Phi')\, d\sigma',$$

pour toutes valeurs de $(\mathfrak{S}, \Phi)$ et de r telles que la calotte de centre $(\mathfrak{S}, \Phi)$ et de rayon r ne contienne aucun point de la somme E des deux ensembles réductibles du théorème.

En utilisant, d'autre part, le théorème IV et en désignant par $Y_n(\mathfrak{S}, \Phi)$ le terme général de la série de Laplace de $f(\mathfrak{S}, \Phi)$

$$Y_n(\mathfrak{S}, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_S f(\mathfrak{S}', \Phi')\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma',$$

on aura encore

$$\int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} f(\Im', \Phi')\, d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} Y_n(\Im', \Phi')\, d\sigma'.$$

Notant donc $Z_n = X_n - Y_n$, nous aurons, dans les mêmes conditions que (15),

$$(16) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} Z_n(\Im', \Phi')\, d\sigma' = 0.$$

La fonction

$$\begin{aligned} H(\Im, \Phi; r) &= \frac{1}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^r d\rho \int_{\omega \leqq \rho} Z_n(\Im', \Phi')\, d\sigma' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)} \frac{2\pi}{r^3} \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos\omega) \sin\omega\, d\omega \end{aligned}$$

est pour $r > 0$ une fonction continue sur la sphère, car

$$\frac{Z_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)} = \frac{X_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)} - \frac{Y_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)},$$

qui converge uniformément vers zéro (d'après le théorème III et l'hypothèse du théorème VIII), est multiplié par le terme général d'une série absolument convergente pour $r > 0$. En vertu du théorème VI et de la relation (16), on aura donc, dans les mêmes conditions que (15),

$$\begin{aligned} \Delta_2' H(\Im, \Phi; r) &= -\frac{2\pi Z_0}{r^3} \int_0^r d\rho \int_0^\rho P_0 \sin\omega\, d\omega \\ &= -\frac{2\pi Z_0(r - \sin r)}{r^3} \equiv -\alpha_0(r), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après le corollaire du théorème VII de I (§ 6),

$$(17) \qquad \Delta H(\Im, \Phi; r) = -\alpha_0(r).$$

Nous démontrerons plus loin que $H(\Im, \Phi; r)$ tend uniformément sur toute la surface sphérique vers $\frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)}$ lorsque r tend vers zéro. Or, de (17) découle

$$(18) \qquad H(\Im, \Phi; r) = \alpha_0(r) \log \sin\omega + G(\Im, \Phi; r),$$

$G(\Im, \Phi; r)$ étant une solution de l'équation $\Delta u = 0$, régulière au

point $(\mathfrak{I}, \Phi)$. N'oublions pas que, soit dans (17), soit dans (18), $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et r sont toujours supposés tels que la calotte de centre $(\mathfrak{I}, \Phi)$ et de rayon r ne contienne aucun point de l'ensemble E. Comme $\lim\limits_{r=0} \alpha_0(r) = \frac{\pi}{3} Z_0$, nous concluons de (18) que, dans le voisinage de tout point qui n'appartient pas à E, la fonction harmonique $G(\mathfrak{I}, \Phi; r)$ tend uniformément vers sa limite pour $r = 0$. Cette limite est donc elle-même, d'après un théorème connu de la théorie du potentiel (qui se transpose sans autre sur la sphère), une fonction harmonique; (18) donne donc, à la limite $r = 0$,

$$\lim_{r=0} H(\mathfrak{I}, \Phi; r) = \frac{\pi}{3} Z_0 \log \sin\omega + \text{solution de } \Delta u = 0 \text{ régulière,}$$
$$\text{sauf peut-être sur E.}$$

Par suite, la fonction $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\mathfrak{I}, \Phi)}{n(n+1)} = \frac{3}{\pi} \lim\limits_{r=0} H(\mathfrak{I}, \Phi; r)$ est encore une solution de l'équation $\Delta u = \text{const.}$ régulière en tout point $(\mathfrak{I}, \Phi)$ qui n'appartient pas à l'ensemble réductible E. Un raisonnement semblable à celui qui a été fait au paragraphe précédent nous permet d'en conclure que $Z_n(\mathfrak{I}, \Phi) \equiv 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, donc que $X_n(\mathfrak{I}, \Phi)$ est le terme général de la série de Laplace de $f(\mathfrak{I}, \Phi)$.

Il nous reste à démontrer la convergence uniforme de $H(\mathfrak{I}, \Phi; r)$ vers sa limite $\frac{\pi}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\mathfrak{I}, \Phi)}{n(n+1)}$. Elle repose sur le lemme suivant, que nous avons implicitement employé dans I (§ 8).

Lemme. — Soit $u_n(r)$ une fonction continue de r dans $0 < r \leqq a$, telle que

$$\lim_{n=\infty} u_n(r) = 0 \quad \text{pour } r \neq 0, \qquad \lim_{r=0} u_n(r) = 1,$$

telle, de plus, que

$$\sum_{1}^{\infty} |u_n(r) - u_{n+1}(r)| < M \qquad (0 < r \leqq a),$$

M étant une constante indépendante de r.

Soit encore

$$\sum_{1}^{\infty} v_n(\mathfrak{I}, \Phi).$$

une série uniformément convergente sur la surface sphérique.

Sous ces hypothèses, la série $\sum_1^\infty u_n(r)\, v_n(\Im, \Phi)$ est uniformément convergente relativement à r dans l'intervalle $0 \leqq r \leqq a$, et l'on a

$$\lim_{r=0} \sum_1^\infty u_n(r)\, v_n(\Im, \Phi) = \sum_1^\infty v_n(\Im, \Phi).$$

Nous appliquerons ce lemme (dont la démonstration s'obtient par l'emploi de la transformation d'Abel) en prenant

$$u_n(r) = \frac{6}{h^3}\int_0^r d\rho \int_0^\rho \mathrm{P}_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega = \frac{3}{\pi r^3}\int_0^r d\rho \int_{\omega=\rho} \mathrm{P}_n(\cos\omega)\, d\sigma',$$

$$v_n(\Im, \Phi) = \frac{\mathrm{Z}_n(\Im, \Phi)}{n(n+1)}.$$

La seule condition du lemme qu'il peut être malaisé de vérifier est dans notre cas spécial la suivante :

$$\frac{1}{r^3}\sum_1^\infty \left| \int_0^r d\rho \int_0^\rho \sin\omega [\mathrm{P}_n(\cos\omega) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\omega)]\, d\omega \right| < \mathrm{M}$$

au voisinage de $h = 0$.

En remarquant que, d'après la formule de Mehler (I, § 7),

$$\mathrm{P}_n(\cos\omega) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\omega \frac{\sin(n+1)\psi \sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\omega)}}\, d\psi$$

est positif pour $(n+1)\omega \leqq \pi$, nous aurons, en désignant par n_0 le plus grand entier tel que $r < \frac{\pi}{n_0+1}$,

$$\frac{1}{r^3}\sum_1^{n_0} \left| \int_0^r d\rho \int_0^\rho \sin\omega [\mathrm{P}_n(\cos\omega) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\omega)]\, d\omega \right|$$

$$= \frac{1}{r^3} \left| \int_0^r d\rho \int_0^\rho \sin\omega [\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_{n_0+1}(\cos\omega)]\, d\omega \right|$$

$$< \frac{2}{r^3} \int_0^r d\rho \int_0^\rho \sin\omega\, d\omega = \frac{2(r - \sin r)}{r^3} < \frac{1}{3}.$$

(*A suivre.*)

MÉLANGES.

SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE DE FONCTIONS SPHÉRIQUES

(suite et fin);

PAR M. MICHEL PLANCHEREL.

Pour estimer ensuite la somme étendue de n_0+1 à l'infini, nous déduirons d'abord de l'équation différentielle à laquelle satisfait $P_n(\cos\omega)$ la formule

$$\int_0^r d\rho \int_0^\rho P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)}\left[\sin r\, P_n(\cos r) - \int_0^r P_n(\cos\omega)\cos\omega\, d\omega\right].$$

La somme en question devient alors

$$\frac{1}{r^3}\sum_{n_0+1}^{\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)}\left[\sin r\, P_n(\cos r) - \int_0^r P_n(\cos\omega)\cos\omega\, d\omega\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sin r\, P_{n+1}(\cos r) - \int_0^r P_{n+1}(\cos\omega)\cos\omega\, d\omega\right]\right|$$

et elle est évidemment inférieure à

$$\frac{\sin r}{r^3}\sum_{n_0+1}^{\infty}\left|\frac{P_n(\cos r) - P_{n+1}(\cos r)}{(n+1)(n+2)}\right| + \frac{2\sin r}{r^3}\sum_{n_0+1}^{\infty}\frac{|P_n(\cos r)|}{n(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1}{r^3}\sum_{n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\int_0^r |P_n(\cos\omega) - P_{n+1}(\cos\omega)|\cos\omega\, d\omega$$
$$+\frac{1}{r^3}\sum_{n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\int_0^r |P_n(\cos\omega)|\cos\omega\, d\omega.$$

En traitant ces différentes sommes comme nous l'avons fait dans I (§ 9, p. 252) pour les expressions $J_1(h)$ et $J_2(h)$, nous nous rendrons compte facilement qu'elles sont des fonctions bornées de r quand r tend vers zéro.

9. *Une condition nécessaire et suffisante.* — Le théorème d'unicité et le théorème IV permettent de donner la condition nécessaire et suffisante suivante pour l'existence d'une génératrice.

THÉORÈME IX. — *Pour que la série de fonctions sphériques* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\Xi, \Phi)$ *possède une fonction génératrice, il faut et il suffit que* $|X_n(\Xi, \Phi)| < kn^2$ *et que la série intégrée terme à terme sur toute calotte de centre et de rayon arbitraires soit l'intégrale sur cette calotte d'une fonction sommable.*

La nécessité de ces conditions découle des théorèmes I' et IV. Leur suffisance peut se démontrer comme suit. Soit $f(\Xi, \Phi)$ une fonction sommable telle que

$$\int_{\omega \leqq r} f(\Xi', \Phi')\, d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\omega \leqq r} X_n(\Xi', \Phi')\, d\sigma'.$$

Désignons par $Y_n(\Xi, \Phi)$ le terme général de la série de Laplace de $f(\Xi, \Phi)$. Le théorème IV montre que

$$\int_{\omega \leqq r} f(\Xi', \Phi')\, d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\omega \leqq r} Y_n(\Xi', \Phi')\, d\sigma'.$$

Donc, si nous notons $Z_n = X_n - Y_n$, nous aurons, sur toute la surface sphérique,

$$(19) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\omega \leqq r} Z_n(\Xi', \Phi')\, d\sigma' = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\Xi, \Phi) \int_0^r P_n(\cos\omega) \sin\omega\, d\omega = 0,$$

Or, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\Xi, \Phi)}{n(n+1)} \int_0^r P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$ est uniformément convergente, parce que $|X_n| < kn^2$, $\lim_{n=\infty} \frac{Y_n}{n} = 0$ [théorème (I')] et que $\int_0^r P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Nous pouvons par conséquent appliquer le théorème d'unicité à (19) et conclure que $Z_n(\Xi, \Phi) \equiv 0$.

La condition $|X_n| < kn^2$ pourrait être remplacée par $|X_n| < \Phi(n)$,

$\Phi(n)$ étant telle que $\sum \frac{\Phi(n)}{n^{3+\frac{1}{2}}}$ converge. Il serait intéressant de savoir si l'on peut se débarrasser de toute condition relative à l'ordre de grandeur de X_n.

SUR LES RECHERCHES DE M. CARLEMAN RELATIVES AUX FONCTIONS HARMONIQUES;

Par M. HOLMGREN.

---

1. Soit C un contour fermé simple admettant en chaque point une tangente unique et un rayon de courbure non nul, variant d'une manière continue. Nous caractérisons un point quelconque t sur C par la longueur t de l'arc At compté à partir d'une origine arbitraire A. En désignant par r_{pt} la distance d'un point p arbitraire du plan au point t sur le contour, nous considérons les potentiels de double et de simple couche

$$W(p) = \int_C \frac{\cos(r_{pt}, n_t)}{r_{pt}} \varphi(t)\, dt$$

et

$$V(p) = \int_C \log \frac{1}{r_{pt}} \psi(t)\, dt,$$

n_t étant la normale intérieure en t.

Dans son Mémoire : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta matematica*, Band 20), Poincaré a traité les problèmes suivants :

1° Trouver une fonction $\varphi(t)$ telle que $W(p)$ vérifie en chaque point s sur C la relation

$$W_i(s) - W_e(s) - \lambda [W_i(s) + W_e(s)] = 2\pi f(s),$$

$W_i(s)$ et $W_e(s)$ étant les limites vers lesquelles tend la valeur du potentiel $W(p)$, lorsque le point p tend vers le point s en

restant à l'intérieur ou à l'extérieur de C; $f(s)$ est une fonction continue donnée.

2° Pour une fonction continue $g(s)$ donnée, trouver une fonction $\psi(t)$ telle que $V(p)$ vérifie en chaque point s de C la relation

$$(2)\qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_i - \left(\frac{dV}{dn}\right)_e + \lambda\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_i + \left(\frac{dV}{dn}\right)_e\right] = -2\pi g(s),$$

$\left(\frac{dV}{dn}\right)_i$ et $\left(\frac{dV}{dn}\right)_e$ désignant les limites vers lesquelles tendent la dérivée de $V(p)$, prise suivant la direction n_s, lorsque le point p tend vers le point s en restant à l'intérieur ou à l'extérieur de C.

Les relations (1) et (2) sont équivalentes aux équations intégrales

$$(3)\qquad \varphi(s) - \lambda\int_C \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{\pi r_{st}}\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

$$(4)\qquad \psi(s) - \lambda\int_C \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{\pi r_{st}}\,\psi(t)\,dt = g(s).$$

Il existe des séries entières en λ, $\varphi(s,\lambda)$ et $\psi(s,\lambda)$, convergentes pour $|\lambda|$ suffisamment petit, qui vérifient ces relations. Concernant le prolongement analytique de ces séries, Poincaré démontre le théorème suivant :

Si C *admet en chaque point une tangente unique et un rayon de courbure non nul qui varie d'une manière continue,* $\varphi(s,\lambda)$ *et* $\psi(s,\lambda)$ *sont des fonctions méromorphes de* λ *dans tout le plan.* Les pôles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont tous réels et simples.

Le noyau des équations intégrales (3) et (4) étant ici une fonction continue, ces résultats sont des corollaires immédiats de la théorie de Fredholm.

Au contraire, si l'on suppose que C admet un nombre fini de points anguleux $P_1, P_2, \ldots, P_n$, on trouve des résultats tout à fait différents. Le noyau

$$K(s,t) = \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{\pi r_{st}}$$

devient singulier d'une telle manière que la méthode de Fredholm n'est plus applicable. On trouve encore que (3) et (4) sont vérifiés

par des séries entières $\varphi(s, \lambda)$ et $\psi(s, \lambda)$, qui convergent dans l'entourage de $\lambda = 0$.

Dans le travail ici résumé, l'auteur étudie, d'une part, le prolongement analytique de $\varphi(s, \lambda)$ et $\psi(s, \lambda)$; d'autre part, il donne la solution des équations (3) *et* (4) *pour chaque valeur de λ.*

Ces deux problèmes sont étroitement liés l'un à l'autre. Dans la première partie dudit Mémoire, on obtient, en partageant $K(s, t)$ en deux noyaux

$$K(s, t) = G(s, t) + H(s, t),$$

où $H(s, t)$ est borné et $G(s, t)$ un certain noyau facile à traiter par des approximations successives, le théorème suivant :

R *étant le plus petit des nombres*

$$\frac{\pi}{|\pi - \alpha_1|}, \quad \frac{\pi}{|\pi - \alpha_2|}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi}{\pi - \alpha_n},$$

$\varphi(s, \lambda)$ *et* $\psi(s, \lambda)$ *sont des fonctions méromorphes de λ à l'intérieur du cercle* $|\lambda| < R$ *et leurs pôles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ y sont tous simples et réels* (¹).

R étant plus grand que 1, on obtient ainsi la solution pour $\lambda = \pm 1$, cas particulièrement intéressants pour les problèmes aux limites relatifs aux fonctions harmoniques (²).

2. La Partie II contient un examen des propriétés de $\varphi(s, \lambda)$ et $\psi(s, \lambda)$ à l'extérieur de la circonférence $|\lambda| = R$. On y arrive par la construction d'une solution explicite (formée d'intégrales définies) pour un contour C composé de deux arcs de cercle. En se bornant pour plus de simplicité à des contours C, admettant un seul point anguleux, on obtient le théorème suivant :

Traçons deux coupures L et L' le long de l'axe réel, l'une allant de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{|\pi - \alpha_1|}$, l'autre de $\frac{\pi}{|\pi - \alpha_1|}$ à $+\infty$:

(¹) La méthode employée ne suffit pas pour décider s'il existe un nombre fini ou infini de pôles à l'intérieur du cercle $|\lambda| < R$. *Par la méthode plus efficace développée dans la Partie II, on trouve que ce nombre est fini.*

(²) Problèmes de Dirichlet et de Neumann.

$\varphi(s, \lambda)$ et $\psi(s, \lambda)$ sont des fonctions méromorphes de λ dans tout le plan ainsi découpé, et leurs pôles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont tous réels et simples sans point limite à distance finie. L *et* L′ *sont en général* [*c'est-à-dire pour $f(s)$ et $g(s)$ arbitraires*] *des coupures essentielles pour les fonctions $\varphi(s, \lambda)$ et $\psi(s, \lambda)$. Au contraire, si $f(s)$ au point anguleux $P_1 (s = s_1)$ vérifie la relation*

$$|f(s) - f(s_1)| < K|s - s_1|^{\delta} \qquad (\delta > 0),$$

$\varphi(s, \lambda)$ peut être prolongé analytiquement au delà de L *et* L′, *les points $\pm$* R *étant dans ces cas des points critiques algébriques.* (Avec plus de précision $\varphi(s, \lambda)$ admet dans l'entourage de $\lambda = R$ le développement

$$\varphi(s, \lambda) = (\sqrt{\lambda - R})^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{\lambda - R})^{n}.$$

En ce qui concerne les équations (3) et (4) et les équations homogènes correspondantes

$$(5) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_C K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

$$(6) \qquad \psi(s) - \lambda \int_C K(t, s)\, \psi(t)\, dt = 0,$$

on a le théorème suivant :

Il existe une suite de nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sans point-limite à distance finie, tels que les équations (5) *et* (6) *pour ces valeurs de λ et seulement pour celles-ci, ont respectivement des solutions continues ou absolument intégrables, non identiquement nulles. Il y a seulement un nombre fini de telles solutions linéairement indépendantes correspondant au même λ_i, ce nombre étant égal pour les deux équations.*

Par contre, si l'on n'exige pas que $\varphi(s)$ soit continu, mais seulement intégrable, l'équation (5) *admet des solutions* [$\varphi(s, \lambda)$] *lorsque λ appartient à un domaine à deux dimensions* O + O′ (le domaine haché dans la figure ci-contre). Les points de O s'obtiennent au moyen de la fonction

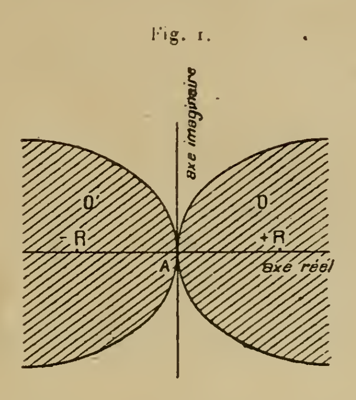
$$\lambda = \frac{\operatorname{sh} \pi q}{\operatorname{sh} |\pi - \alpha_1| q}$$

lorsque q parcourt le domaine

$$J[q] \leqq 1, \qquad R[q] \geqq 0 \quad (^1);$$

O′ est le domaine symétrique de O par rapport à l'origine (*fig.* 1). *Ces solutions* $\varphi(s, \lambda)$ *sont des fonctions multiformes admettant*

Fig. 1.



deux valeurs de signes contraires lorsque λ *varie respectivement dans* O, O′. *Les points* R *et* — R *sont les points de ramification. Pour* λ *réel et* $|\lambda| > R$, $\varphi(s, \lambda)$ *est une fonction bornée par rapport à* s, *discontinue pour la valeur* $s = s_1$ *(correspondant au point* P_1*). Elle y oscille, pour* $\lambda > R$, *comme l'expression*

$$a(\lambda) \cos\left[q(\lambda) \log \frac{1}{|s - s_1|}\right] + b(\lambda) \sin\left[q(\lambda) \log \frac{1}{|s - s_1|}\right],$$

et comme

$$\frac{s_1 - s}{|s - s_1|} \left\{ a(\lambda) \cos\left[q(-\lambda) \log \frac{1}{|s - s_1|}\right] + b(\lambda) \sin\left[q(-\lambda) \log \frac{1}{|s - s_1|}\right] \right\}$$

pour $\lambda < -R$, $q(\lambda)$ *étant la fonction inverse réelle de*

$$\lambda = \frac{\operatorname{sh} \pi q}{\operatorname{sh} |\pi - \alpha_1| q}.$$

(¹) $R[q]$ et $J[q]$ désignent la partie réelle et la partie imaginaire de q.

Pour $\lambda = R$ et $\lambda = -R$, il existe des solutions de la forme

$$\varphi(s) = a \log^2 \frac{1}{|s - s_1|} + b \log \frac{1}{|s - s_1|} + \varphi^+(s),$$

$$\varphi(s) = \frac{s_1 - s}{|s - s_1|} \left[a' \log \frac{1}{|s - s_1|} + b' \right] + \varphi^-(s),$$

$\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ étant continus en $s = s_1$.

Toute autre solution de (5) *ou* (6) *est une combinaison linéaire à coefficients constants des solutions ci-dessus.* Si λ n'appartient ni à la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ (spectre ponctuel), ni à la coupure $L + L'$ (spectre linéaire), *l'équation* (3), *où* $f(s)$ *est supposé continu, admet une et une seule solution* $\varphi(s)$ *continue.* De même, si $g(s)$ est absolument intégrable, *l'équation intégrale* (4) admet, pour ces valeurs de λ, *une et une seule solution* $\psi(s)$ *absolument intégrable.*

3. $K(s, t)$ est un noyau symétrisable. Il existe un noyau positif défini

$$S(s, t) = \log \frac{R_0}{r_{st}}$$

tel que

$$\int_C K(s, t)\, S(t, y)\, dt = M(x, y)$$

est une fonction symétrique par rapport à x et y. On peut trouver une fonction $\chi(s, \lambda)$, définie sur L et L', dont l'intégrale par rapport à λ est une *solution différentielle* de l'équation (6). On entend par là qu'en posant

$$\Delta A^* = \int_{\lambda}^{\lambda + \Delta\lambda} \chi(s, \lambda)\, d\lambda,$$

$$\Delta B^* = \int_{\lambda}^{\lambda + \Delta\lambda} \lambda\, \chi(s, \lambda)\, d\lambda,$$

la relation

$$\Delta A^* - \int_C K(t, s)\, \Delta B^*\, dt = 0$$

aura lieu. Alors les expressions

$$\Delta A = \int_C \log \frac{R_0}{r_{st}}\, \Delta A^*\, dt,$$

$$\Delta B = \int_C \log \frac{R_0}{r_{st}}\, \Delta B^*\, dt$$

correspondent à une solution différentielle de l'équation (5). Soient $\Delta_1\lambda$ et $\Delta_2\lambda$ deux intervalles sur $L + L'$ n'empiétant pas l'un sur l'autre. Alors on aura

$$\int_C \Delta_1 A \, \Delta_2 A^* \, dt = 0.$$

Par un choix convenable de $\chi(s, \lambda)$, on peut faire en sorte que

$$\int_C \Delta A \, \Delta^* A \, dt = \Delta\lambda$$

Il existe deux fonctions $\chi(s, \lambda)$ et $\varphi(s, \lambda)$ telles que

$$\Delta A = \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \varphi(s, \lambda) \, d\lambda, \qquad \Delta A^* = \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \chi(s, \lambda) \, d\lambda.$$

Supposons de plus que les fonctions fondamentales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ de l'équation (6) correspondant aux valeurs principales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont normées d'une telle manière que

$$\int_C \int_C \log \frac{R_0}{r_{st}} \psi_p(s) \psi_p(t) \, ds \, dt = \begin{cases} 0 (p \neq q), \\ 1 (p = q). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\varphi_p(s) = \int_C \log \frac{R_0}{r_{st}} \psi_p(t) \, dt,$$

les $\varphi_p(s)$ sont des fonctions fondamentales de l'équation (5) qui satisfont aux relations

$$\int_C \psi_p(t) \varphi_q(t) \, dt = \begin{cases} 0 (p \neq q), \\ 1 (p = q). \end{cases}$$

Dans le paragraphe 12 se trouve démontré le théorème suivant :

Posons

$$f_p = \int_C f(t) \varphi_p(t) \, dt,$$

$$f_\lambda = \int_C f(t) \varphi(t, \lambda) \, dt,$$

où $f(s)$ est une fonction telle que

$$\int_C \int_C \log \frac{R_0}{r_{st}} |f(s)| \, |f(t)| \, ds \, dt$$

existe. Alors on a

$$\sum f_p^2 + \int_R^\infty f_\lambda^2\, d\lambda + \int_{-\infty}^{-R} f_\lambda^2\, d\lambda \leqq \int\int_C \log \frac{R_0}{r_{st}} f(s) f(t)\, ds\, dt.$$

Nous citons encore une proposition relative au développement des fonctions arbitraires analogue à un théorème connu de MM. Hilbert et Schmidt, concernant les noyaux réguliers.

Toute fonction de la forme

$$\int_C M(s, t)\, h(t)\, dt,$$

où $h(t)$ est une fonction arbitraire telle que

$$\int\int \log \frac{R_0}{r_{st}} \,|\, h(s) \,|\, |\, h(t) \,|\, ds\, dt$$

converge, admet le développement absolument convergent

$$\int_C M(s, t)\, h(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(s)}{\lambda_1} + \int_{L+L'} \frac{h_\lambda \varphi(s, \lambda)}{\lambda}\, d\lambda,$$

où l'on a posé

$$h_p = \int_C h(t)\, \psi_p(t)\, dt,$$

$$h_\lambda = \frac{d}{d\lambda} \int_C h(t)\, A^*(t, \lambda)\, dt.$$

NOTE SUR LE TIR EN TERRAIN INCLINÉ;

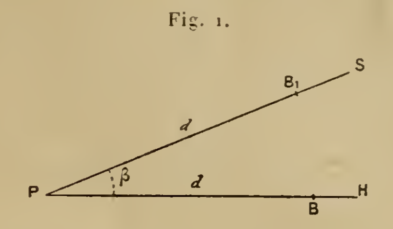
PAR LE GÉNÉRAL D'ARTILLERIE P. DUBOIS.

La présente Note a pour objet de faire ressortir certaines propriétés très simples de la trajectoire dans le vide d'un point matériel auquel on a imprimé une vitesse V, et d'en déduire la détermination des angles de tir à adopter pour une distance donnée lorsqu'on tire à cette distance dans les différents sites.

Posons d'abord la question d'une façon précise et faisons ressortir la nécessité de la traiter.

Un objectif B, situé à une distance d d'une pièce P, peut se trouver, soit sur le même plan horizontal PH que la pièce P, soit

Fig. 1.



sur un plan PS faisant avec PH un angle β. Autrement dit, la position de l'objectif B est déterminée par la distance d à la pièce P et β.

Ceci étant, si l'on considère un objectif situé à la même distance d dans les différents sites, la question qui se pose est celle de l'angle de tir à adopter.

Sur le plan horizontal PH, cet angle de tir, que nous appellerons α, est donné par les tables de tir.

Il s'agit de savoir ce qu'il doit être, pour la même distance, sur les différents sites, par exemple sur le site β du plan PS.

A cet égard, les manuels, instructions et tables de tir d'artillerie distinguent les angles de site *positifs* pour les pentes montantes et les angles de site *négatifs* pour les pentes descendantes à partir de la pièce P.

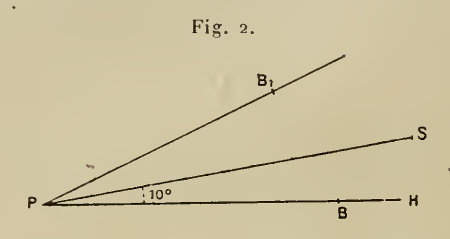
En outre, ces divers documents énoncent, comme règle générale, que lorsqu'on tire à une distance d, sur un site négatif, il faut *diminuer* l'angle de tir α qui convient à la distance d en terrain horizontal et que, lorsqu'au contraire on tire à cette même distance d sur un site positif, il faut *augmenter* l'angle de tir α défini comme ci-dessus.

Pour préciser, les manuels, instructions et tables de tir spécifient que lorsqu'on tire à une distance d sur un site, on fait subir à l'angle de tir qui convient, en terrain horizontal, une correction, dite *correction complémentaire de site*, qui est *toujours négative* lorsque le site est négatif et *toujours positive* lorsque le site est positif.

L'objet de cette Note est de démontrer que cette règle est inexacte et que, notamment, lorsqu'on tire sur un site *positif*, la

correction complémentaire de site qui convient n'est pas *toujours positive*, comme on l'indique, mais doit être, suivant le cas, négative, nulle ou positive. Pour donner une idée de ce qui se passe, le calcul démontre que si, avec une certaine pièce et une certaine charge, on tire à 4000^m sur un site PS incliné à 10°, il faudra, par exemple, adopter un angle de tir de 9° en terrain horizontal et un

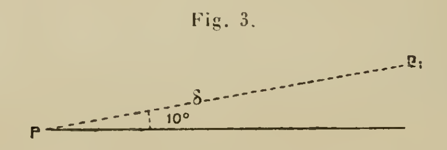
Fig. 2.



angle de 7° seulement sur le site PS de 10° (les différences sont de cet ordre et peuvent atteindre plusieurs degrés). Loin donc qu'il faille adopter, comme on l'énonce dans les instructions, une correction complémentaire de site positive, cette correction devra être négative et même, dans un grand nombre de cas, fortement négative.

Si nous continuons la comparaison entre les angles de tir à adopter pour une distance en terrain horizontal et la même distance dans un site positif, 10° par exemple, le calcul démontre que tant que la distance de l'objectif est inférieure à une certaine dis-

Fig. 3.



tance $PB_1 = \delta$, la correction complémentaire de site doit être négative; que lorsque la distance de l'objectif est égale à δ, la correction complémentaire de site doit être nulle et que, lorsque la distance de l'objectif est supérieure à δ, la correction complémentaire de site change de signe et devient positive. En outre, la distance à partir de laquelle le changement de signe se produit est essentiellement variable et est fonction, à la fois, de l'angle α qui convient à la distance en terrain horizontal et du site β.

On voit combien, radicalement, cette règle diffère de celle qui

figure dans les tables de tir et, par suite, l'intérêt qu'il y a à traiter la question.

On tirera aussi de l'étude ci-après certaines conclusions intéressantes, notamment :

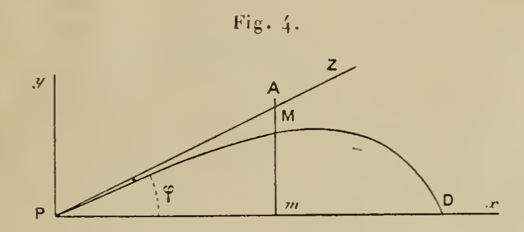
1° Sur l'allure générale des variations de la distance δ définie ci-dessus lorsque le site varie de 0° à 90°;

2° Sur la portée maxima que peut atteindre une pièce tirant dans les différents sites, comparativement à celle dont elle est susceptible, lorsqu'elle tire en terrain horizontal;

3° Sur l'angle de tir, compté à partir du plan de site, pour lequel cette portée maxima est obtenue.

Nous rapportons à deux axes rectangulaires Px (horizontal) et Py (vertical) la trajectoire dans le vide d'un projectile lancé

Fig. 4.



par une pièce P avec une vitesse initiale V et un angle de projection φ.

On sait comment cette trajectoire se détermine.

Si la pesanteur n'existait pas, au bout du temps t, le projectile serait sur la droite de projection PL, en un point A, tel que

$$PA = vt.$$

Mais, du fait de la gravité, et au bout du même temps t, le projectile est tombé de A en M, et s'est placé ainsi sur sa trajectoire en s'abaissant de la hauteur AM, dont la loi de la pesanteur donne la valeur bien connue :

$$AM = \frac{1}{2} g t^2.$$

En appelant x et y les coordonnées du point M de la trajectoire

à l'instant t, on aura donc

$$x = \text{PA} \cos\varphi = \text{V}t \cos\varphi,$$
$$y = \text{M}m = \text{A}m - \text{AM} = \text{V}t \sin\varphi - \frac{1}{2} gt^2,$$

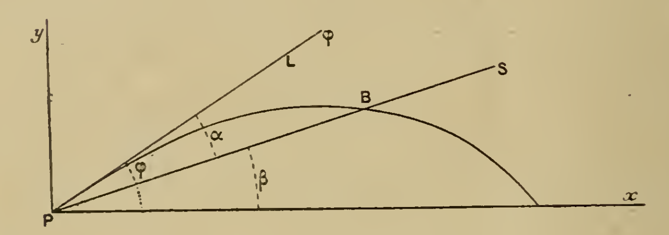
et, en tirant de la première égalité la valeur de t, savoir :

$$t = \frac{\text{X}}{v \cos\varphi},$$

on obtient finalement l'équation suivante de la trajectoire PMD :

$$(1) \qquad y = x \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v^2 \cos^2}.$$

Fig. 5.



Pour déduire de cette équation les conditions du tir (angle de tir et portée), sur un plan quelconque PS, dont le site positif est β, nous considérerons l'angle φ comme la somme de deux autres : $\text{SP}x = \beta$ et $\text{LPS} = \varphi - \beta$, que nous désignerons par α.

Ceci posé, il suffit d'examiner la figure pour reconnaître que PB est la portée obtenue avec l'angle de tir α dans le plan PS dont le site est β.

Nous déterminerons PB, puis PB_0, portée obtenue avec le même angle de tir α en terrain horizontal et nous comparerons ces deux longueurs. Cette comparaison nous donnera la véritable loi ; elle montrera, comme il est dit plus haut, que la correction complémentaire de site n'est pas toujours positive et elle indiquera la position sur la droite PS du point où elle change de signe, négative à gauche de ce point, positive à droite, et nulle en ce point lui-même.

Ayant posé $\alpha = \varphi - \beta$, et par suite $\varphi = \alpha + \beta$, transformons en outre l'équation (1) de la trajectoire en coordonnées polaires,

en prenant pour arguments les vecteurs tels que $PB = \rho$ et les angles de site β.

L'équation de la trajectoire devient

$$\rho \sin\beta = \rho \cos\beta \operatorname{tang}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \frac{g \rho^2 \cos^2\beta}{v^2 \cos^2(\alpha + \beta)}.$$

En divisant les deux membres par ρ, on obtient la portée PB sur le site β par la formule suivante qui se déduit immédiatement de l'égalité précédente :

$$\rho = \frac{2 v^2}{g} \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2\beta} [\cos\beta \operatorname{tang}(\alpha + \beta) - \sin\beta],$$

et qui se réduit elle-même à celle-ci :

(1) $$\rho_\beta = \frac{2 v^2 \sin\alpha \cos(\alpha + \beta)}{g \cos^2\beta} \quad [1].$$

C'est la portée obtenue sur le site β avec l'angle de tir α. En faisant dans cette formule $\beta = 0$, on obtient la portée en terrain horizontal avec le même angle de tir :

$$\rho_0 = \frac{2 v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

formule bien connue.

Comparons maintenant les valeurs de ρ_β et de ρ_0. On a

(2) $$\frac{\rho_\beta}{\rho_0} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2\beta \cos\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\cos\beta}.$$

On reconnaît d'abord immédiatement, qu'en général, les deux valeurs de ρ_0 et de ρ_β sont différentes. Elles ne peuvent être égales que si

$$1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = \cos\beta.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1 - \cos\beta}{\operatorname{tang}\beta}$$

ou

(3) $$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2 \sin^2\frac{\beta}{2} \cos\beta}{\sin\beta} = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}.$$

---

[1] L'indice ajouté à ρ indique l'angle de site auquel se rapporte la valeur de ρ considérée.

Pour qu'un angle de tir α donne la même portée en terrain horizontal et sur le site β, il faut donc que α soit lié à β par la relation

$$\tan\alpha = \cos\beta \tan\frac{\beta}{2}.$$

De α, on déduit la portée que fournit cet angle à la fois en terrain horizontal et sur le site β.

Supposons par exemple qu'on tire sur un site $\beta = 30°$. On a

$$\tan\alpha = 0,866 \times 0,266 = 0,232.$$

Ce qui donne sensiblement $\alpha = 13°$, et, dans la moyenne, une portée qui représente environ la moitié de la portée maximum en terrain horizontal.

Serrons maintenant la question d'un peu plus près et reprenons la formule (2)

$$\frac{\rho_\beta}{\rho_0} = \frac{1 - \tan\alpha \tan\beta}{\cos\beta}.$$

Nous en avons déduit (3) que ρ_β sera égal à ρ_0 lorsqu'on aura

$$\tan\alpha = \cos\beta \tan\frac{\beta}{2},$$

et α donnera alors la seule distance à laquelle on pourra tirer dans le site β sans avoir aucune correction complémentaire de site à faire et en prenant le même angle de tir α qu'en terrain horizontal.

Voyons de même les conditions dans lesquelles ρ_β sera plus grand ou plus petit que ρ_0, c'est-à-dire dans quel cas il faudra faire à l'angle α une correction complémentaire de site, négative ou positive.

Pour que ρ_β soit $> \rho_0$, il faut que

$$\frac{1 - \tan\alpha \tan\beta}{\cos\beta} > 1;$$

d'où l'on déduit

$$\tan\alpha \tan\beta < 1 - \cos\beta$$

et, par le même calcul que celui déjà fait précédemment,

$$\tan\alpha < \cos\beta \tan\frac{\beta}{2}.$$

(*A suivre.*)

MÉLANGES.

NOTE SUR LE TIR EN TERRAIN INCLINÉ (*suite et fin*);

Par le Général d'artillerie P. DUBOIS.

On verra de même que, pour que ρ_β soit $< \rho_0$, il faut que

$$\operatorname{tang} \alpha > \cos\beta \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}.$$

On arrive ainsi à cette règle générale pour déterminer, en site positif, le sens de la correction complémentaire de site à adopter :

Le site sur lequel on tire étant β, *calculer* $\cos\beta \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$ *et déterminer :*

1° *L'angle* α *tel que* $\operatorname{tang}\alpha = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$.

2° *La distance* δ *qui correspond à l'angle de tir* α *en terrain horizontal.*

Si la distance d *à laquelle on doit tirer sur le site* β *est inférieure à* δ, *la correction complémentaire de site est négative; si* $d = \delta$, *elle est nulle; si* d *est plus grand que* δ, *elle est positive.*

Remarquons, en reprenant la formule

$$\frac{\rho_\beta}{\rho_0} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\cos\beta},$$

que, pour $\beta = 0$, le plan de site se confond avec le plan horizontal $\rho_\beta = \rho_0$ et la correction complémentaire de site est nulle à toutes les distances, ce qui s'explique de soi-même.

Voyons aussi ce qui se passe lorsqu'on tire sur un site négatif, par exemple, dans le cas de la figure ci-dessus, le site négatif étant en valeur absolue HPS $= \beta$ et l'angle de tir étant LPS $= \alpha$.

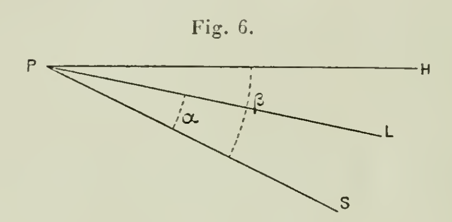
En refaisant le calcul dans les mêmes conditions que précédemment, on arrive aux formules

$$\rho_\beta = \frac{2v^2}{g\cos^2\beta}\cos^2(\beta-\alpha)[\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tang}(\beta-\alpha)],$$

$$\rho_\beta = \frac{2v^2\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)}{g\cos^2\beta} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_\beta}{\rho_0} = \frac{1+\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}{\cos\beta}.$$

Le second membre étant toujours > 1, ρ_β est toujours $> \rho_0$ et la correction complémentaire de site est donc toujours négative lorsqu'on tire sur les sites négatifs.

Fig. 6.



On s'explique un peu l'erreur, capitale cependant, qui a pu conduire à indiquer que la correction complémentaire de site est toujours positive sur les sites positifs.

Cette correction toujours négative et importante sur les sites négatifs élevés, diminue constamment lorsque ces sites se rapprochent de l'horizontale et devient nulle pour le site 0.

On en a conclu trop facilement que cette fonction, d'abord négative et passant par 0, devenait ensuite toujours positive en même temps que les sites auxquels elle s'appliquait. Or, c'est là une erreur que démontrent, non pas seulement l'étude qui précède, mais aussi de nombreuses applications de calcul qui ont été faites à ce sujet.

Examinons, par exemple, comment varient :

1° L'angle α qui donne égalité de portée sur le site 0 et sur le site β lorsque le site β varie lui-même de 0° à 90°.

2° La portée correspondant à cet angle α sur les différents sites positifs.

Remarquons d'abord que, d'après la formule

$$\mathrm{tang}\,\alpha = \cos\beta\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2},$$

α est nul pour $\beta = 0$ et pour $\beta = 90^\circ$ et qu'entre ces deux limites, il a une valeur déterminée qui n'est pas nulle. Partant ainsi de o, augmentant et revenant à o, il passe donc dans l'intervalle par un maximum que nous allons chercher.

Pour cela, égalons à o la dérivée par rapport à β de la fonction tangα; autrement dit, comme le montre un calcul très simple; écrivons

$$\frac{\cos\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}} = \sin\beta \operatorname{tang}\frac{\beta}{2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$\cos\beta = \sin^2\beta \qquad \text{et} \qquad \cos^2\beta + \cos\beta - 1 = 0,$$

équation du second degré en $\cos\beta$, dont la racine positive est

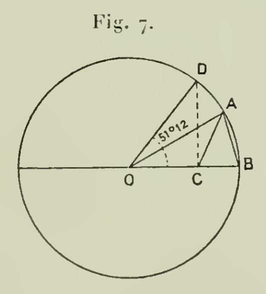
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

valeur connue et qui n'est autre que le côté du décagone régulier dans le cercle de rayon 1. On arrive donc à cette conclusion assez curieuse :

L'angle de site qui attribue son maximum à l'angle de tir α et où, par conséquent, la correction complémentaire de site reste négative à la plus grande distance de la pièce, a pour cosinus le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1. Cet angle de site a pour valeur $51^\circ 12'$ et l'angle α correspondant $20^\circ 18'$.

Il est facile de tracer le premier de ces angles par la construction suivante :

Fig. 7.



AB étant le côté du décagone régulier, mener la bissectrice AC de l'angle OAB, on sait que OC = AC = AB, ce qui est une propriété du décagone régulier.

Élevons la perpendiculaire CD sur OB jusqu'à sa rencontre D avec le cercle; l'angle DOB aura bien pour cosinus le côté du décagone régulier et sera par conséquent l'angle de site cherché.

Cherchons maintenant à nous rendre compte avec plus de précision des valeurs de ρ_β qui correspondent à l'angle limite α dans les différents sites.

Prenons à cet effet deux axes rectangulaires Px et Py, ayant pour origine la pièce P, Px étant horizontal, Py vertical; faisons rayonner à partir de P des droites dans les différents sites et portons sur ces droites les portées qui correspondent aux diverses valeurs de α et qui, comme on le sait, varient dans le même sens que α ou $\operatorname{tang}\alpha$.

Nous savons que, α étant l'angle limite défini ci-dessus qui est lié à β par la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\beta}{2},$$

la portée ρ_β est égale à ρ_0 et peut s'écrire indifféremment

$$\frac{v^2}{g}\sin 2\alpha \qquad \text{(formule en terrain horizontal)}$$

et

$$\frac{2v^2 \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta} \qquad \text{(formule sur le site } \beta\text{)},$$

étant entendu que la relation

$$\operatorname{tang}\alpha \neq \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$$

existe entre α et β.

Employons la première formule et écrivons

$$\rho_\beta = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

D'après une formule connue, on peut écrire aussi

$$\rho_\beta = \frac{2v^2}{g}\,\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tang}\alpha$ par $\cos\beta\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$,

$$\rho_\beta = \frac{2v^2}{g}\,\frac{\cos\beta\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{1+\cos^2\beta\operatorname{tang}^2\frac{\beta}{2}};$$

ce qui précède, par une transformation simple, peut s'écrire aussi

$$\rho_\beta = \frac{v^2}{g} \sin 2\beta \, \frac{1}{2\left[- \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \beta \right]}.$$

Cette expression met sous une forme intéressante la valeur de ρ_β. Elle est en effet un produit de deux facteurs, dont le premier, $\frac{v^2}{g} \sin 2\beta$, est la portée qu'on obtient en terrain horizontal avec l'angle β.

L'autre facteur

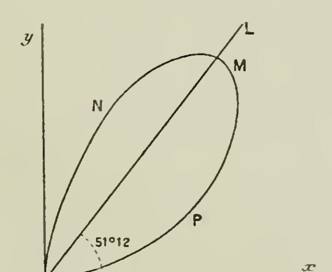
$$\frac{1}{2\left[1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \beta \right]}$$

augmente constamment quand β augmente et varie de $\frac{1}{2}$ quand $\beta = 0$, à 1 quand β atteint 90°.

On voit ainsi que, quand le site augmente de 0° à 90°, la portée à laquelle correspond le changement de signe de la correction complémentaire de site commence par être la moitié de la portée correspondant à l'angle β dans le tir en terrain horizontal et finit par être égale à cette portée quand β atteint 90°.

Réunissons les extrémités des vecteurs ρ_β dans les différents sites, nous obtiendrons la courbe de la figure 8, dont l'équation en ρ et β est donnée ci-dessus. Cette courbe est tangente à l'axe

Fig. 8.



des x et à l'axe des y et se répartit, non symétriquement, de part et d'autre de la droite OL qui fait un angle de $51^\circ 12'$ avec l'horizontale $\left(\text{angle dont le cosinus est } \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

OM est le vecteur maximum. Pour tous les points à l'intérieur de la courbe ONMP, la correction complémentaire de site est négative; pour tous les points situés sur la courbe, elle est nulle; pour tous les points à l'extérieur de la courbe, elle est positive.

Enfin, on peut aisément calculer la valeur exacte de la correction complémentaire de site à adopter dans les divers sites pour tirer à une distance donnée.

Appelons α l'angle de tir en terrain horizontal pour une distance donnée d et α_1 l'angle de tir à prendre pour cette même distance sur un site β.

Connaissant α, nous allons calculer α_1.

D'après ce qui a été démontré plus haut, on a entre α et α_1 la relation

$$\frac{2\sin\alpha_1\cos(\alpha_1+\beta)}{\cos^2\beta} = \sin 2\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\sin\alpha_1\cos(\alpha_1+\beta) = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{2},$$

ou, d'après une règle connue sur la différence des sinus,

$$\sin(2\alpha_1+\beta) - \sin\beta = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{2},$$

ou

$$\sin(2\alpha_1+\beta) = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{2} + \sin\beta.$$

Dans le second membre, tout est connu. Nous n'avons plus que l'inconnue α_1 dans le premier membre.

Posons

$$\frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{2} + \sin\beta = \sin\varphi$$

et calculons φ en conséquence; nous aurons

$$\sin(2\alpha_1+\beta) = \sin\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\alpha_1 = \frac{\varphi-\beta}{2}.$$

Ce qui donnera l'angle α_1 à adopter au lieu de α pour tirer à la distance d dans le site β.

Enfin $\alpha_1 - \alpha$ est la correction complémentaire de site elle-même.

On terminera cette étude par les deux remarques intéressantes qui suivent sur la portée maximum qu'on peut atteindre dans les divers sites.

En terrain horizontal, la portée correspondant à un angle de tir α est donnée par la formule

$$P = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$$

et sa valeur est maximum lorsque $\alpha = 45°$.

Nous allons démontrer que, lorsqu'on tire sur un site β, la portée maximum est obtenue, pour la valeur de α,

$$\alpha = \frac{90 - \beta}{2}.$$

On sait que la valeur de la portée pour un angle de tir α dans le site β est donnée par la formule

$$\rho_\beta = \frac{2v^2}{g} \frac{\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2\beta}.$$

La variable α n'entrant qu'au numérateur de cette expression, la portée maximum sera obtenue lorsque la dérivée du numérateur par rapport à α sera nulle, c'est-à-dire pour

$$\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha - \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha = 0,$$

ce qui revient à

$$\cos(2\alpha + \beta) = 0$$

ou

$$\alpha = \frac{90 - \beta}{2},$$

comme on l'a énoncé.

On peut remarquer que cette valeur de l'angle de tir α donnant la portée maximum est absolument générale. Il suffit, par exemple, de faire $\beta = 0$ pour retrouver l'angle de $45°$ qui donne la portée maximum en terrain horizontal.

Voyons maintenant comment varie cette portée maximum suivant le site.

Notre formule

$$\rho_\beta = \frac{2v^2}{g} \frac{\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2\beta}$$

peut aussi s'écrire, en vertu d'un théorème connu,

$$\rho_\beta = \frac{v^2}{g} \frac{\sin(2\alpha + \beta) - \sin\beta}{\cos^2\beta}.$$

Mais nous savons que, dans le cas du maximum, $2\alpha + \beta = 90°$.

Donc la portée maximum sur le site β que nous désignerons par π_β est

$$\pi_\beta = \frac{v^2}{g} \frac{1 - \sin\beta}{\cos^2\beta}$$

ou

$$\pi = \frac{v^2}{g} \frac{1 - \sin\beta}{1 - \sin^2\beta} = \frac{v^2}{g} \frac{1}{1 + \sin\beta},$$

c'est-à-dire la portée maximum en terrain horizontal, qui est $\frac{v^2}{g}$, multipliée par le facteur $\frac{1}{1 + \sin\beta}$ qui est plus petit que 1 et décroît de 1 à $\frac{1}{2}$ lorsque β varie de 0° à 90°.

C'est ainsi que dans les tirs contre avions, qui se font dans les sites souvent voisins de la verticale, les portées maxima se trouvent très sensiblement diminuées, au fur et à mesure qu'on s'élève en site. Pour $\beta = 90°$, $\pi_\beta = \frac{v^2}{g} \frac{1}{2}$. C'est la moitié de la portée maximum en terrain horizontal.

En résumé, l'étude ci-dessus conduit aux principales conclusions suivantes :

1° Lorsqu'on tire sur un site négatif, la correction complémentaire de site est toujours négative.

2° Lorsqu'on tire sur un site positif, la correction complémentaire de site reste négative tant que la distance à laquelle on tire est inférieure à une certaine distance limite δ qui est fonction du site et qui peut d'ailleurs représenter une très notable partie de la portée maximum (plusieurs milliers de mètres par exemple).

3° Lorsque (sur un site positif) on tire à la distance δ définie ci-dessus, la correction complémentaire de site est nulle.

4° Lorsque (sur un site positif) on tire à une distance supérieure à δ, la correction complémentaire de site est positive.

5° Dans le plan de tir et du côté des sites positifs, une courbe de forme ovoïde, tangente à l'axe des x et à l'axe des y, sépare les

deux zones où la correction complémentaire de site est négative ou positive; sur cette courbe elle-même, la correction est nulle.

6° Dans un site quelconque β, l'angle de tir α qui donne la portée maximum est donné par la formule

$$\alpha = \frac{90 - \beta}{2}.$$

7° Dans un site quelconque β, la portée maximum que nous appellerons π_β, fournie comme on vient de l'indiquer par l'angle de tir $\alpha = \frac{90 - \beta}{2}$, est donnée par la formule

$$\pi_\beta = \frac{v^2}{g} \frac{1}{1 + \sin\beta}.$$

On voit ainsi que pour $\beta = 90$ cette portée maximum est moitié de ce qu'elle est en terrain horizontal.

DÉMONSTRATION DU LEMME DE LEBESGUE [1] SANS L'EMPLOI DES NOMBRES DE CANTOR;

PAR Mme GRACE CHISHOLM YOUNG.

1. Définition. — Considérons un ensemble d'intervalles qui n'empiètent pas l'un sur l'autre, tous contenus dans un segment donné (a, z) et tels que tout point de ce segment, sauf le point z, appartienne à l'un de ces intervalles soit comme point intérieur au sens étroit, soit comme extrémité gauche. Ces intervalles constituent ce qu'on appelle *une chaîne de Lebesgue* (a, z) ou *chaîne de Lebesgue s'étendant de a à z*.

---

(1) Contenu implicitement dans Lebesgue (*Leçons sur l'Intégrale*, p. 62 et 122), et explicitement dans W. H. Young (*Quart. Journ. of Math.*, t. XLII, p. 73). Voir aussi *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2e série, t. XIV, p. 128-130.

La seule démonstration tentée jusqu'à présent est basée sur les nombres de Cantor de 1re, 2e et 3e classes. Celle de la présente Note n'implique que la notion d'infini contenu dans la série des nombres naturels. Pal a prouvé le lemme sans se servir des nombres de Cantor dans le cas particulier où il n'y a qu'un intervalle correspondant à chaque point.

Lemme. — *Étant donné dans* (a, z) *un ensemble d'intervalles tels que chaque point de* (a, z) *est l'extrémité gauche d'un au moins de ces intervalles* [1], *il existe une chaîne de Lebesgue* (a, z) *constituée par des intervalles de cet ensemble.*

Soit x un point quelconque de l'intervalle $a \leqq x < z$, et soit x' l'extrémité droite du segment constitué par tous les points de toutes les chaînes de Lebesgue partant de x qu'on peut former au moyen d'intervalles de l'ensemble donné. A chaque point x de l'intervalle nous avons ainsi associé un second point x' bien déterminé et nous avons

$$a \leqq x < x' \leqq z.$$

Si x' coïncide avec z pour tous les points x, la démonstration du lemme est immédiate, comme on le voit facilement. En effet, il suffit de prendre d'abord une chaîne de Lebesgue (a, b), où $z - b < 1$, puis une chaîne (b, c), où $z - c < \frac{1}{2}$, et ainsi de suite. En réunissant toutes ces chaînes, nous aurons une chaîne de Lebesgue (a, z). Le lemme sera donc établi si nous pouvons démontrer que x' coïncide toujours avec z.

2. Supposons que, pour une certaine position de x, le point x' qui lui est associé ne coïncide pas avec z.

Dans ce cas, il n'y a pas de chaîne de Lebesgue (x, x'), car une telle chaîne (x, x') constituerait avec l'un quelconque des intervalles de l'ensemble donné qui ont x' pour extrémité gauche, une nouvelle chaîne partant de x et dépassant x'. Or, ceci est impossible.

Cependant, nous pouvons trouver une chaîne de Lebesgue (x, b) dont l'extrémité droite b soit à une distance de x' inférieure à e_1, où $e_1 < 1$, et

$$x < x' - e_1 < b < x' < z.$$

Le point b' associé à b doit alors ou coïncider avec x', ou bien être situé entre b et x'; car s'il était situé au delà de x', on pourrait, en ajoutant à notre chaîne de Lebesgue (x, b) une nouvelle chaîne

[1] Ils peuvent même former un sous-ensemble infini d'intervalles.

partant de b, l'étendre au delà de x'. Ainsi, nous aurons

$$x < x' - e_1 < b < b' \leqq x' < z.$$

Nous considérons maintenant l'intervalle (b, b') et nous raisonnons comme nous venons de le faire pour (x, x'). Nous trouvons ainsi une nouvelle paire de points associés (c, c') tels que

$$b < b' - e_2 < c < c' \leqq b', \qquad \text{où} \qquad e_2 < \frac{1}{2}.$$

En continuant de même indéfiniment, nous obtenons une série de points associés deux à deux (x, x'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), ..., où

(1) $$x < b < c < d < \ldots,$$

(2) $$x' \geqq b' \geqq c' \geqq d' \geqq \ldots,$$

tandis que

(3) $$0 < \overline{bb'} < 1, \qquad 0 < \overline{cc'} < \frac{1}{2}, \qquad 0 < \overline{dd'} < \frac{1}{2^2}, \qquad \ldots.$$

L'ensemble (1) définit donc un point X unique et bien déterminé, le point limite de cet ensemble situé à droite de lui. Nous avons obtenu par ce procédé une chaîne de Lebesgue (x, X), celui constitué par les chaînes choisies successivement (x, b), (b, c), (c, d), ... Par suite, le point X se trouve entre x et x'. Ajoutons à cette chaîne (x, X) un intervalle quelconque de l'ensemble donné qui ait pour extrémité gauche le point X. La nouvelle chaîne de Lebesgue formée dépasse le point X, donc aussi, par suite de (3), l'un au moins des points b', c', ... Or ceci est impossible, car il y aurait alors une portion de cette chaîne qui, partant d'un des points b, c, ..., dépasserait son associé.

Nous avons démontré ainsi que le point x' coïncide toujours avec z. La démonstration du lemme est donc achevée.

APPROXIMATION DES FONCTIONS PAR LES SÉRIES DE PUISSANCES A COEFFICIENTS COMMENSURABLES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

M. Borel a signalé le fait qu'étant donné un développement

(1) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

on peut lui substituer (et cela d'une infinité de manières) un autre développement

(2) $$\varphi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

à coefficients A_n nombres *commensurables*, ayant mêmes singularités que $f(z)$ dans toute région du plan où les deux fonctions existent (*Fonctions méromorphes*, p. 36-37).

Établissons qu'*on peut choisir les* A_n *de manière que le module de la différence* $f(z) - \varphi(z)$ *soit, dans un cercle donné, plus petit qu'un nombre* ε *donné à l'avance.*

A cet effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite de nombres *commensurables* tels que la série

(3) $$H(z) = \frac{1}{|\lambda_0|} + \frac{z}{|\lambda_1|} + \frac{z^2}{|\lambda_2|} + \ldots$$

ait son rayon de convergence non nul. Soit c un nombre réel positif *commensurable* supérieur ou égal au plus grand module de $H(z)$ pour z compris dans un cercle C, ayant l'origine comme centre et un rayon R ne surpassant les rayons de convergence r et ρ respectifs des séries (1) et (3).

Posons

(4) $$t_n = 10^{q} c \lambda_n a_n$$

(q étant un entier positif donné), désignons par T_n la partie entière du nombre t_n et envisageons la série à coefficients commensurables (2) où

(5) $$A_n = \frac{a_n T_n}{t_n} = \frac{T_n}{10^q c \lambda_n}.$$

En posant

$$(6) \qquad a_n - A_n = \delta_n,$$

on aura

$$(7) \qquad \left|\frac{t_n \delta_n}{a_n}\right| = |t_n - T_n| < 1,$$

et par suite

$$(8) \qquad |\delta_n| < \left|\frac{a_n}{t_n}\right| = \frac{10^{-q}}{c} \frac{1}{|\lambda_n|},$$

ce qui montre que la fonction

$$(9) \qquad F(z) = f(z) - \varphi(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \ldots,$$

manifestement holomorphe dans C, a, pour toute valeur de z comprise dans C, son module plus petit que $\frac{10^{-q}}{c} H(R)$, et par suite plus petit que 10^{-q}.

La fonction $f(z)$ peut donc être représentée, au voisinage du point ordinaire $z = 0$, et avec une approximation voulue, par une série de puissances $\varphi(z)$ à coefficients commensurables, ayant les dénominateurs donnés à l'avance.

Une telle représentation peut, manifestement, s'effectuer au voisinage de tout point ordinaire $z = \alpha$ de $f(z)$.

On peut disposer des λ_n de manière à remplir diverses conditions voulues. Ainsi, en les prenant tels que $\sqrt[n]{\lambda_n}$ augmente indéfiniment avec n, la fonction $H(z)$, et par suite aussi la fonction $F(z)$, seront des fonctions entières de z : *les deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ auront mêmes singularités dans toute région du plan des z où elles existent.* Tel serait le cas si l'on prend, par exemple : 1° $\lambda_n = 10^{n^2}$ et c = nombre commensurable supérieur ou égal à $\sum_0^\infty g^{n^2} R^n$, où $g = 0,1$; 2° ou bien $\lambda_n = n^n$ et c = nombre commensurable supérieur ou égal à $\sum_1^\infty n^{-n} R^n$; 3° ou bien $\lambda_n = n!$ et c = nombre commensurable supérieur ou égal à e^R, etc.

Si l'on prend $\lambda_n = 1$ et c = entier supérieur ou égal au plus grand module que prend la fonction $\frac{1}{1-z}$ dans le cercle C (de

rayon inférieur à 1), *la série* $\varphi(z)$ *est une série de puissances à coefficients nombres entiers, divisée par un nombre entier.*

Si l'on prend les λ_n tels que $|\lambda_n a_n|$ tend uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, *la fonction* $\varphi(z)$ *se réduit à un polynome en* z *à coefficients nombres entiers, divisé par un nombre entier.* En effet, le nombre t_n devient plus petit que 1 à partir d'un rang fini $n = p$, de sorte qu'on aura $T_{p+1} = 0$, $T_{p+2} = 0$, $T_{p+3} = 0$, ..., et par suite aussi $A_{p+1} = 0$, $A_{p+2} = 0$ $A_{p+3} = 0$, ... La fonction $\varphi(z)$ se réduit à un polynome de degré $p = q + h$, où h varie avec la suite λ_n, mais ne change pas avec le degré d'approximation q exigé.

Lorsque $f(z)$ est une fonction *entière* de z, le rayon R du cercle C dans lequel cette dernière approximation peut s'effectuer se laisse augmenter indéfiniment : il suffit de prendre pour les λ_n une suite de nombres commensurables tels que les deux expressions $|\lambda_n|^{-n}$ et $|\lambda_n a_n|$ tendent uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Ainsi, dans le cas d'une fonction $f(z)$ *de genre fini*, on prendra, par exemple, pour λ_n, un nombre commensurable quelconque inférieur ou égal à $(n!)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, puisque le produit d'un tel nombre par le module de a_n tend uniformément vers zéro, d'après le théorème connu de Poincaré.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLIII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLIII; 1919. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

Quai des Grands-Augustins, 55.

59615-20

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 4, Paris, VIe.

59614 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES.
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLIII. — ANNÉE 1919.

(LIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Série III, Tome XIX, 1912.

Giulotto (Virgilio). — Funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile (Fonctions hypersphériques polyharmoniques à une variable) (1-19).

On sait que ce sont les solutions homogènes et d'un degré n entier d'une équation de Laplace d'ordre q

$$\Delta_2^q f = 0,$$

dans l'espace à N dimensions. L'auteur détermine le nombre de ces fonctions linéairement indépendantes et en fait une rapide étude générale.

Il s'occupe plus particulièrement de celles de ces fonctions qui, ne dépendant que de la variable x, sont définies par le développement

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}} = \Sigma \alpha^n X_{N,n}^q(x);$$

ces fonctions $X_{N,n}^q(x)$ ne diffèrent donc pas des $C_\nu^n(x)$ souvent étudiées (¹).

Notons, parmi les formules établies par l'auteur, des expressions des fonctions $X_{N,n}^q$ analogues à celles de Dirichlet et d'Ivory et Jacobi pour les

---

(¹) Cf. *Encyclopédie* (édition française, t. II, vol. 5, p. 257).

polynomes de Legendre; c'est ainsi que l'on a

$$X_{N,n}^{q} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varphi_0} (2\cos\varphi - 2x)^{\frac{2q-N}{2}} \cos\frac{2q-N-2n}{2}\varphi\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi} (2\cos\varphi - 2x)^{\frac{2q-N}{2}} \cos\left[\frac{2q-N-2n}{2}\varphi - \frac{2q-N}{2}\pi\right] d\varphi.$$

M. Giulotto donne aussi les formules exprimant les fonctions d'indice $\nu (= N - 2q)$ comme dérivées de fonctions d'indices moindres, ou comme sommes de produits de fonctions sphériques ordinaires. Il fait enfin une brève étude de ces fonctions dans l'intervalle $-1, +1$.

Levi (*Eugenio-Elia*). — Sopra un teorema di esistenza per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (Sur un théorème d'existence pour les solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre (*suite et fin*) (21-35).

L'auteur s'occupe ici des équations

$$f(x, y, z;\, p, q, r, s, t) = 0$$

du type parabolique, et plus particulièrement de celles qui possèdent des caractéristiques de la seconde classe (équations de Goursat et von Weber). Il en décrit les propriétés caractéristiques et démontre à leur sujet le théorème suivant :

Étant données deux courbes de l'espace qui se rencontrent en un point O, *il existe une seule surface intégrale qui passe par ces deux courbes, pourvu qu'aucune d'elles ne soit tangente à la direction de la caractéristique à laquelle appartient l'élément du second ordre en* O *de la surface à construire.*

Russyan (*Cesare*). — Sopra il cangiamento di variabili indipendenti nell' integrale triplo (Sur le changement de variables indépendantes dans l'intégrale triple) (37-43).

L'auteur démontre la formule du changement de variables en utilisant la formule de Green dans l'espace.

Hudson (*Hilda-P.*). — On fundamental points in Cremona Space-transformations (Sur les points fondamentaux dans les transformations de Cremona de l'espace) (45-56).

L'auteur étudie le nombre des conditions linéaires imposées par l'existence d'un point fondamental multiple isolé avec cône des tangentes dégénéré et contenant une partie fixe. Il étudie aussi le nombre de points d'intersections équi-

valents à un tel point multiple dans l'intersection de trois surfaces. Il s'occupe également du cas où les nappes de surface qui touchent la partie fixe du cône des tangentes ont un contact d'ordre supérieur, et enfin des points multiples analogues sur des courbes fondamentales. Nombreux exemples de transformations de Cremona présentant des points fondamentaux de la nature précédente : grâce à l'introduction de tels points, l'auteur construit des transformations d'ordre n quelconque sans courbes fondamentales.

Sannia (*Gustave*). — Osservazioni sulla « Réclamation de priorité » del sig. Zindler (Observations sur la « Réclamation de priorité » de M. Zindler) (57-59).

Calapso (*Pasquale*). — Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni (Les surfaces applicables sur les quadriques et leurs transformations) (61-82, 107-178).

Dans un autre Mémoire [1], l'auteur avait formé le système différentiel dont dépend l'étude des déformées des quadriques, en prenant le problème au point de vue intrinsèque, c'est-à-dire en recherchant les systèmes conjugués communs à une quadrique et à une surface applicable sur elle. Il développe ici, du même point de vue, la théorie des *transformations* des surfaces applicables sur les quadriques, qu'il obtient donc comme transformations des solutions du système différentiel précédent.

Il trouve ainsi pour les transformations B_k de Bianchi, relatives à une quadrique à centre, une représentation analytique analogue à celle qu'établit Bianchi pour les paraboloïdes. Mais la méthode suivie met en évidence de nouvelles transformations, nommées par l'auteur B_∞, qui constituent un cas limite des B_k.

L'auteur établit d'importantes propriétés géométriques des transformations B_∞. On sait que, S et S' étant deux surfaces déduites l'une de l'autre par une B_k, S est susceptible d'une transformation infinitésimale, le déplacement de chaque point se produisant parallèlement à la normale au point correspondant de S'. Dans le cas d'une B_∞, cette déformation infinitésimale est une translation isotrope, et inversement, à toute translation isotrope d'une S correspond une B_∞ bien déterminée.

Le théorème de permutabilité de Bianchi s'étend aux transformations B_∞ : M. Calapso en donne une nouvelle démonstration.

Signalons enfin une étude, rendue plus aisée par les représentations analytiques précédentes, des relations des transformations B_k avec les autres transformations des déformées des quadriques (transformations de Guichard et transformation involutive H de Bianchi).

Cisotti (*U.*). — Sopra la traslazione uniforme di un solido in un liquido indefinito (Sur la translation uniforme d'un solide dans un liquide indéfini) (83-106).

---

[1] *Rend. di Palermo*, 1902, p. 297.

Étude, suivant les méthodes dues à M. Levi-Civita, du mouvement (mouvement plan irrotationnel) de translation uniforme d'un solide immergé dans un liquide indéfiniment étendu.

L'auteur ne s'occupe que des mouvements continus; je renvoie le lecteur, à propos de la nécessité d'introduire au contraire des lignes de discontinuité s'étendant à l'infini, au bel article de M. H. Villat paru récemment dans le *Bulletin* [1]. En gardant les notations de cet article (p. 6), le domaine D est constitué ici par le plan f avec une coupure suivant un segment de l'axe réel. M. Cisotti représente ce domaine sur l'extérieur d'un cercle du plan d'une nouvelle variable ζ. Il forme alors la fonction $\Omega(\zeta)$, dont dépend la solution du problème posé, pour le cas d'un obstacle polygonal. Par exemple, dans le cas (qu'il traite complètement) d'une lame rectiligne inclinée de l'angle α, on a

$$\Omega = i \log \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}.$$

Dans le cas d'un profil curviligne régulier, on a

$$\Omega = \omega_0 + \Omega',$$

ω_0 étant la solution correspondant à un profil circulaire et Ω' une fonction régulière à l'extérieur du cercle considéré. La partie réelle et la partie imaginaire de Ω' sont simplement liées à la courbure du contour.

Nielsen (*Niels*). — Sur les transcendantes élémentaires et les nombres de Bernoulli et d'Euler (179-204).

L'auteur étudie les polynomes en x définis par le développement, en série entière de α, de la fonction $[\varphi(\alpha)]^{-x}$ $[\varphi(0) = 1]$. Il examine divers cas particuliers et étudie aussi les polynomes en x et y définis par le développement de

$$(\cos\alpha - y \sin\alpha)^{-x} \quad \text{ou de} \quad \left(\frac{y - e^{-\alpha(y-1)}}{y-1}\right)^{-x}.$$

Il donne de nombreuses relations (formules d'addition, équations aux différences finies) vérifiées par ces polynomes, dont il indique, d'autre part, diverses représentations analytiques. Les polynomes introduits, dont certains jouent un rôle notable en Analyse, prennent, pour des valeurs simples des variables, des valeurs remarquables : nombres de Bernoulli, d'Euler, coefficients de la tangente; l'auteur déduit donc, des représentations données pour les polynomes, de nombreuses expressions de ces nombres.

Ranum (*Arthur*). — On the projective differential geometry of N-dimensional spreads generated by ∞^1 flats (Sur la géométrie différentielle projective d'étendues à N dimensions engendrées par ∞^1 variétés linéaires) (205-249).

---

[1] Tome XLII, 1918.

Il s'agit de multiplicités S à m dimensions décrites par un espace linéaire F_{m-1} à $m-1$ dimensions qui dépend, d'une façon continue, de 1 paramètre. Ces multiplicités généralisent, dans l'espace projectif à $n-1$ dimensions, les surfaces réglées. L'auteur en étudie les propriétés qui ont pour correspondantes, dans l'espace ordinaire, la distinction entre surfaces développables ou non, les relations entre une développable, son arête de rebroussement, la multiplicité de ses plans tangents.

La multiplicité S étant définie par les trajectoires de m points indépendants de F_{m-1}, l'un de ces points P a des coordonnées (homogènes) fonctions d'un paramètre et le point dérivé P′ (dont les coordonnées s'obtiennent par dérivation) décrit la trajectoire dérivée. L'auteur introduit alors la multiplicité tangente de S définie par les trajectoires de S et leurs dérivées et la multiplicité focale de S définie par les trajectoires de S dont les dérivées sont aussi trajectoires de S. Ces deux notions (focale et tangente) ne sont pas inverses l'une de l'autre, de sorte que les focales et tangentes d'ordre quelconque de S forment un *arbre* (*tree*) dont l'auteur étudie la ramification.

Bianchi (*Luigi*). — Sui sistemi obliqui di Weingarten (Sur les systèmes obliques de Weingarten) (251-330).

Ce sont les systèmes de ∞^1 surfaces pseudosphériques d'égal rayon, telles que, dans la correspondance que définissent sur elles leurs trajectoires sous un angle constant (cet angle peut être une constante absolue ou varier d'une surface à l'autre), les lignes asymptotiques se correspondent par arcs égaux; les lignes de courbure se correspondent donc. Ces systèmes généralisent les systèmes orthogonaux de Weingarten étudiés précédemment par l'auteur; on va voir qu'ils jouissent de propriétés analogues.

Les plus simples systèmes obliques sont constitués par l'ensemble des surfaces déduites d'une même surface pseudosphérique par une transformation B_σ de Bäcklund. On engendrera donc les systèmes obliques les plus généraux par la répétition continue de la transformation infinitésimale de Bäcklund; ils dépendent de quatre fonctions arbitraires d'une variable.

L'auteur étudie particulièrement les systèmes obliques (Ω_σ) pour lesquels les trajectoires précédentes coupent toutes les surfaces pseudosphériques sous le même angle : les trajectoires sont alors des courbes de Bertrand d'une même famille. Ces systèmes se présentent (comme les systèmes orthogonaux) en couples de systèmes conjugués, les trajectoires correspondantes étant des courbes de Bertrand conjuguées.

Dans le cas général, M. Bianchi démontre que, comme pour les systèmes orthogonaux de Weingarten, la transformation de Bäcklund permet de déduire une infinité de tels systèmes d'un système initial donné; mais la transformation complémentaire joue ici le même rôle que la transformation générale de Bäcklund. Enfin, le théorème de permutabilité s'applique encore et permet d'éviter des quadratures dans l'application répétée de la transformation de Bäcklund.

Une deuxième partie du Mémoire est consacrée à l'étude des systèmes obliques dans les espaces à courbure constante, positive ou négative.

JOSEPH PÉRÈS.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,

6e série, Tome III, 1907 (1).

Jordan (C.). — Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires. Deuxième partie (5-51).

Soit
$$T_{lmn} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \mu_\beta x_\gamma$$
une forme trilinéaire par rapport aux l variables λ, aux m variables μ, aux n variables x.

M. Jordan se propose de ramener cette forme à une forme canonique, par des substitutions linéaires opérées sur chacun de ces systèmes de variables.

Cette question est analogue à celle qui a été traitée dans la première Partie du présent Mémoire; la méthode est la même, les résultats sont plus variés.

On peut écrire
$$T_{lmn} = \Sigma L_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma,$$
les L étant des fonctions linéaires des λ. S'il existe seulement l' variables λ qui soient indépendantes, on pourra les prendre pour variables indépendantes à la place des λ et réduire ainsi le nombre des variables du premier système qui figurent dans la forme trilinéaire.

Il se peut que le nombre des variables μ et celui des x soit réductible semblablement.

On suppose qu'aucune réduction de ce genre n'est possible. Dans ce cas, on a
$$l \leqq mn, \qquad m \leqq ln, \qquad n \leqq lm.$$

1. Il en résulte que si l'un des nombres l, m, n se réduit à l'unité, par exemple si $l = 1$, on a $m = n$ et
$$T_{lmn} = T_{1nn} = \lambda \Sigma a_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$
ou bien
$$T_{1nn} = \lambda \Sigma M_\gamma x_\gamma,$$
les M_γ étant des fonctions distinctes des variables μ. En les prenant pour variables indépendantes, on obtiendra l'expression canonique
$$T_{1nn} = \lambda \Sigma \mu_\gamma x_\gamma.$$

2. La solution est beaucoup moins simple si l, m, n sont tous > 1. M. Jordan étudie d'abord le cas de $l = 2$, puis celui de $l = m = n = 3$. Il obtient ainsi 51 types, dont il fait l'énumération, en y joignant les caractères invariants qui les distinguent.

---

(1) *B. S. M.* Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVI, 1912, 2e Partie, p. 18. — N. B. *Erratum : B. S. M.*, t. XXXV, 1911, 2e Partie, p. 17, ligne 6 en remontant, *au lieu de* 1908, *lire* 1905 (c'est-à-dire, *lire :* Analyse du *J. M. P. A.*, année 1905).

Autonne (*L.*). — Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité (53-104).

Une quantité ou grandeur hypercomplexe x, appartenant à un groupe (ε) d'ordre n, est une expression

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_β sont des nombres ordinaires (ou scalaires) réels ou complexes, et les ε_β des symboles choisis de façon que le produit de deux quantités quelconques, prises dans le groupe (ε). appartienne au même groupe; les x_β sont les n coordonnées de x.

Pour les quantités complexes ordinaires, la monogénéité consiste en ceci : la différentielle $d\mathrm{X}$ de la fonction est égale au produit $u\,dx$ de la quantité complexe u par la différentielle dx de la variable.

M. L. Autonne cherche ce que devient la monogénéité pour les r^2 ions (quaternions pour $r = 2, \ldots$), c'est-à-dire dans le cas où (ε) est un groupe simple, par conséquent à multiplication non commutative, avec $n = r^2$: car la monogénéité ne peut, dans ses traits principaux, être étendue qu'aux groupes (ε) à multiplication commutative.

Pour les r^2 ions, l'expression $u\,dx$ est à remplacer par $u\,dx\,v$. En général, ces expressions $u\,dx\,v$ ne se réduisent pas ensemble. Le problème se formule donc ainsi : mettre $d\mathrm{X}$ sous la forme

$$d\mathrm{X} = \sum_i u_i\,dx\,v_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}').$$

La décomposition est possible de plusieurs façons, mais le minimum N des nombres N′ sera la *catégorie* N, ou *indice de monogénéité*.

L'auteur adopte la terminologie et les notations de M. Frobenius dans sa *Theorie der hypercomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903), ainsi que les notations de ce géomètre, il en résume d'abord les principaux résultats.

Voici les types qu'il obtient pour les fonctions

$$\mathrm{X} = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} \mathrm{X}_{\alpha\delta}(x_{11}, \ldots, x_{rr}),$$

de catégorie *un* :

Type I :

$$\mathrm{X} = \mathrm{K}\,x\,\mathrm{L} + \mathrm{M},$$

où K, L, M sont trois constantes hypercomplexes de (ε).

Type II :

$$\mathrm{X} = \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha 1} \mathrm{X}_{\alpha 1}(t_\alpha), \qquad t_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_{\beta 1}, \qquad \mathrm{K}_{\alpha\beta} = \text{const.},$$

où la fonction $\mathrm{X}_{\alpha 1}(t)$ d'une variable t est arbitraire.

Type III :

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{11}, \ldots, x_{1r}), \quad X_{1\delta} = \text{fonction arbitraire.}$$

Type IV :

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(\omega); \qquad X_{\alpha\delta}(t) = \int \eta_{\alpha}(t) p_{\delta}(t)\, dt,$$

$$\omega = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_r), \qquad q_{\gamma} = \sum_{\beta} h_{\beta} x_{\beta\gamma} \qquad (h_{\beta} = \text{const.}),$$

$$\eta_{\alpha}(t), \qquad p_{\delta}(t), \qquad \psi = \text{fonctions arbitraires} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r).$$

M. Autonne est revenu plus récemment sur cette question [1].

Auric (M.). — Recherches sur les fractions continues algébriques (105-206) [2].

Une question préliminaire se pose : celle de la notation. Il serait intéressant d'établir une convention définitive. M. Auric adopte une notation allemande :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \cdots;$$

peut-être le signe $\dot{+}$ risque-t-il d'être confondu avec celui de la soustraction.

Le but de l'auteur est de rattacher la détermination des conditions de convergence des fractions continues algébriques à la théorie des fonctions méromorphes et quasi-méromorphes et à celles des intégrales définies à coupures envisagées par Hermite et Stieltjes.

Tout d'abord, en utilisant un procédé identique à celui qui aurait pour but de chercher le plus grand commun diviseur entre les polynomes

$$S_0 = \quad a_0^k x^k + a_0^{k-1} x^{k-1} + \ldots \qquad (a_0^k \neq 0),$$
$$S_1 = a_1^{k-1} x^{k-1} + a_1^{k-2} x^{k-2} + \ldots \qquad (a_1^{k-1} \neq 0),$$

M. Auric développe $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue (A),

$$(A) = \alpha_1 x + \beta_1 \dot{+} \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} \dot{+} \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} \dot{+} \cdots,$$

qui est limitée ou non, suivant que $\frac{S_0}{S_1}$ est réductible ou non à une fraction rationnelle; (A) sera appelée forme canonique ou normale des fractions continues algébriques qui sont les quotients de deux séries entières dont les degrés maxima diffèrent d'une unité.

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, 1909, p. 544.

[2] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand prix des Sciences mathématiques, 1906).

Il en résulte la classification suivante :

Première catégorie :

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_4} \dotplus \dots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^m x^m + \alpha_n^{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_n^1 x + \alpha_n^0 ;$$

ici, la fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en x : si S_0 est de degré maximum k, S_n sera de degré maximum $k - mn$.

Deuxième catégorie :

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}}{\lambda_4} \dotplus \dots$$

avec

$$\lambda_n = \beta_n^m z^m + \beta_n^{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_n^1 z + \beta_n^0 ;$$

la fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en $\frac{1}{x}$; S_0, S_1, S_2, ..., S_n sont de même degré en $\frac{1}{x}$.

Troisième catégorie : 1° *m est pair.* — On a

$$\frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{1}{\lambda_2} \dotplus \frac{1}{\lambda_3} \dotplus \dots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^i + \beta_n n^{i-1} + \dots + \mu_n x^{2-i} + \nu_n x^{1-i}.$$

2° *m est impair.* — Dans ce cas,

$$\frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_2} \dotplus \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_3} \dotplus \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_4} \dotplus \dots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^i + \beta_n x^{i-1} + \dots + \mu_n x^{1-i} + \nu_n x^{1-i}.$$

Après avoir établi quelques formules générales qui lui sont nécessaires, l'auteur de ce Mémoire étudie les conditions de convergence selon le mode de croissance ou de décroissance, pour n infini, de $\frac{S_0}{S_n}$; avec le secours de la théorie des fonctions majorantes, il étudie ensuite les fractions continues qui ont l'une des formes

$$Y_1 = \lambda_1 \dotplus \frac{1}{\lambda_2} \dotplus \frac{1}{\lambda_3} \dotplus \dots,$$

$$Y_2 = 1 \dotplus \frac{\mu_2}{1} \dotplus \frac{\mu_3}{1} \dotplus \dots,$$

où γ_n, μ_n sont des polynomes entiers en x et $\frac{1}{x}$ dont les coefficients diminuent au delà de toute limite pour $n = \infty$; il passe ensuite à l'étude des fractions périodiques simples et asymptotiquement périodiques.

La dernière Partie de son travail a pour but d'étendre à l'axe des x tout entier les résultats que Stieltjes n'avait obtenu que pour la partie négative de cet axe.

On trouve à la fin des formules permettant de passer d'une série de Taylor au développement en fraction continue de la forme normale (A), puis quelques applications à l'étude de la convergence de fractions continues rencontrées entre autres auteurs par Lambert, Poincaré, Stieltjes, Laguerre.

Mathy (*M.-E.*). — Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme (207-212).

L'auteur calcule ces composantes en partant des formules qui donnent l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. Les fonctions ζ qu'on rencontre dans le cas général, dégénèrent en fonctions circulaires ou logarithmiques quand l'ellipsoïde est de révolution. Si cet ellipsoïde se réduit à une sphère, on retrouve l'expression classique $3\,\mathrm{MI}\,\dfrac{\sin\omega\cos\omega}{r^3}$.

Jordan (*C.*). — Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables (213-266).

Les groupes abéliens sont ceux dont les substitutions sont échangeables entre elles.

Soient G_m, G_n, deux groupes abéliens respectivement contenus dans les groupes linéaires à m et à n variables; la réunion de leurs substitutions donnera un nouveau groupe abélien, dit *réductible*, contenu dans le groupe linéaire à $m+n$ variables.

M. Jordan étudie spécialement les groupes irréductibles et généraux, c'est-à-dire ceux qui ne sont contenus comme sous-groupes dans aucun autre groupe de même nature.

Le procédé de recherche est celui-ci : un théorème préliminaire donne la forme générale des substitutions du groupe cherché G. Soit Γ le groupe constitué par l'ensemble de toutes les substitutions de cette forme.

Choisissons arbitrairement l'une, S, de ces substitutions, que nous supposerons appartenir à G. Déterminons le sous-groupe Γ_1 formé par celles des substitutions de Γ qui sont échangeables à S : il contiendra G.

Choisissons arbitrairement dans Γ_1 une substitution S_1 qui ne soit pas échangeable à toutes les autres. Supposons qu'elle appartienne à G; ce groupe sera contenu dans le sous-groupe Γ_2 formé par celles des substitutions de Γ_1 qui sont échangeables à S_1.

Choisissons dans Γ_2 une nouvelle substitution S_2, qui ne soit pas échangeable à toutes les autres, et ainsi de suite. Nous arriverons à un dernier groupe sous-groupe Γ_i, qui sera abélien : ce sera l'un des groupes cherchés.

Ce procédé de tâtonnement donnera bien tous les groupes G, mais au prix de calculs fort longs; de plus, un même groupe pourra se reproduire sous plusieurs formes différentes, dont une seule devra être conservée, si l'on veut éviter les doubles emplois dans l'énumération des groupes G.

Deux des groupes obtenus ne peuvent, en effet, être considérés comme vraiment distincts, s'ils sont identiques, ou peuvent être rendus tels par le changement des variables indépendantes.

Or, si l'on convient de dire qu'une fonction linéaire des variables x_k^i est de rang k, lorsque les variables de rang le plus élevé qui y figurent sont de rang k, il est évident que le groupe Γ sera transformé en lui-même, si l'on remplace chacune des variables x_k^i par une nouvelle variable indépendante du même rang (à la seule condition que les nouvelles variables soient linéairement distinctes).

Soient G l'un des groupes abéliens contenus dans Γ; soient G, G′, ... ses divers transformés par les changements de variables ci-dessus; ces groupes ne seront pas distincts et ne devront compter que pour un seul dans l'énumération des groupes cherchés.

Le problème est susceptible de solution dans les cas les plus simples.

L'idée directrice de M. Jordan est celle-ci : soit

$$\varphi = \Sigma\lambda_{ik} x_k^i$$

une fonction linéaire des x à coefficients indéterminés; la substitution S lui donnera un accroissement

$$\Delta\varphi = \Sigma\lambda_{ik}\,\Delta x_k^i;$$

cela posé, il est démontré par l'auteur que tout groupe abélien G qui contient la substitution S, contiendra, s'il est général, la substitution qui accroît φ de $\Delta\varphi$.

Il en résulte une classification complète des groupes abéliens où le nombre des variables ne dépasse pas 6. Pour 2, 3 et 4 variables, ces groupes sont respectivement au nombre de 1, 3 et 7; leur nombre est de 18 pour 5 variables, de 63 pour 6 variables.

Rémoundos (*G.*). — Sur la croissance des fonctions multiformes (267-298).

Ce Mémoire est la suite d'un autre travail publié dans le même recueil ([1]), dans lequel est faite l'étude systématique des fonctions algébroïdes (ayant un nombre fini de branches) et où il est démontré que celles-ci possèdent la plupart des propriétés fondamentales des algébroïdes uniformes (*alias* fonctions entières ou méromorphes).

M. Rémoundos expose ici des résultats nouveaux concernant la croissance des algébroïdes multiformes et se rattachant à la recherche de la forme la plus générale, sous laquelle le théorème de M. Picard et ses généralisations s'étendent aux algébroïdes multiformes avec un cas d'exception unique; dans cette extension, la densité des zéros et des infinis ne suffit pas pour les algébroïdes multiformes : d'autres éléments interviennent et jouent un rôle essentiel.

Il existe une différence profonde entre la croissance des fonctions algébroïdes et celle des autres transcendantes uniformes connues.

M. Rémoundos étend aux fonctions multiformes le théorème de Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière admettant des zéros donnés. Il démontre cette propriété essentielle des fonctions algébroïdes : que leur ordre de gran-

---

([1]) *J. M. P. A.*, 1906.

deur n'est jamais inférieur à celui de leur dérivée; il cite à ce propos des résultats bien connus de M. Borel et de M. Hadamard, et il en donne des extensions.

D'intéressantes applications à la théorie des équations différentielles, et paraissant susceptibles de développements, terminent ce Mémoire.

Maillet (*E.*). — Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants (299-337).

Soit X un nombre réel ou complexe, limite d'une suite

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n, \quad \ldots$$

de fractions rationnelles $X_n = \frac{P_n}{Q_n}$ toutes distinctes, à dénominateurs Q_n entiers réels croissants. On détermine α_n, supposé positif, par la condition

$$|X - X_n| = Q_n^{-\alpha_n};$$

soit maintenant α un nombre aussi grand qu'on veut; si l'on peut, quel que soit α, choisir l'entier ν assez grand pour que α_n soit plus grand que α dès que $n > \nu$, X est un nombre transcendant, comme l'a montré Liouville.

On dira que X est un nombre de Liouville. La suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ est formée, à partir d'un certain terme, de réduites du développement en fraction continue de X. Il existe aussi des cas étendus où la fraction continue

$$A = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$$

($a_0, a_1, a_2, \ldots$ réels, quelconques, positifs) représente des nombres de Liouville.

M. Maillet a dénommé suite quasi périodique une suite infinie

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

où l'on trouve une infinité de suites infinies

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

de quantités a_k, et dont chacune s_m est formée par la répétition β_m fois d'un même groupe de quantités a_k, le nombre β_m croissant indéfiniment et suffisamment vite avec m.

La fraction continue

$$B = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + 1 : a_3 + \ldots,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont des entiers positifs, est une fraction continue quasi périodique.

Sous certaines conditions, les nombres B sont encore transcendants.

M. Maillet étudie le cas où les nombres a_j, non entiers positifs, sont de la forme $a_j = b_j c_j^{-1}$ et il établit diverses conditions suffisantes pour que la fraction continue

$$J = b_0 c_0^{-1} + 1 : b_1 c_1^{-1} + 1 : b_2 c_2^{-1} + \ldots$$

soit un nombre transcendant de Liouville; il indique, avec précision, des cas étendus où l'une au moins de ces conditions est satisfaite : ainsi, les c_n étant

donnés, J est un nombre de Liouville lorsque la croissance des b_n est suffisamment rapide avec n.

Si les fractions continues J sont quasi périodiques, il existe aussi de nombreux cas où elles représentent des nombres transcendants.

En dernier lieu, les fractions continues

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

où les g_i, h_i sont des entiers positifs pour $i > 0$ (g_0 rationnel) sont étudiées: elles se ramènent facilement au type J; dans des cas multiples, qui sont précisés, elles représentent des nombres de Liouville.

Humbert (*G.*). — Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives (337-449).

Les résultats classiques de Kronecker sur les nombres de classes peuvent être établis par une méthode relativement élémentaire, due à Hermite et reposant sur les développements en séries trigonométriques de certains quotients de fonctions thêta.

Prolongeant, et fort loin, le travail d'Hermite, M. Humbert obtient des formules nouvelles, cette fois, relatives aux nombres de classes.

Après avoir rappelé ou établi les développements en séries de Fourier qui seront le plus souvent utilisés dans la suite et apporté un complément direct soit aux formules initiales de Kronecker, soit à celles qu'il leur a ajoutées plus tard, l'auteur de ce Mémoire étudie des formules qu'il appelle *formules du type de Liouville*, parce que ce géomètre en a fait connaître, sans démonstration d'ailleurs, les premiers exemples.

Plus loin, sont données des relations où figurent, avec les nombres de classes, certaines représentations d'un entier par la forme $x^2 - 2y^2$. Ici M. Humbert s'est rencontré avec M. Petr, qui a obtenu simultanément des résultats analogues, mais moins généraux. On notera à ce propos l'importance de l'introduction d'une forme indéfinie dans les applications des fonctions elliptiques à l'arithmétique, ce qui permet, en particulier, de retrouver et d'établir un résultat, indiqué par Stieltjes, sans aucune démonstration, dans sa correspondance avec Hermite.

Cette première Partie du Mémoire est terminée par des considérations arithmétiques et des formules où interviennent, à côté des nombres de classes, les minima des classes de même déterminant, ou les carrés de ces minima.

Une deuxième Partie a trait aux applications de la transformation du troisième ordre, combinée avec la méthode d'Hermite. Il est montré comment les formules établies dans la première Partie permettent, non seulement de démontrer, mais encore d'étendre les relations entre les nombres de classes qui ont été déduites de la multiplication complexe de la fonction modulaire liée au tétraèdre; des développements nouveaux résultent ici de certaines relations d'un autre caractère [1].

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

---

[1] *Cf.* G. HUMBERT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 146, 1908, p. 905, et t. 150, 1910, p. 431.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,

6e série, Tome IV, 1908 (1).

Rémy (*L.*). — Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois (1-37).

L'étude des surfaces hyperelliptiques, qui sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, a été commencée par M. Picard et poursuivie par M. Humbert. Ces surfaces peuvent être rattachées aux courbes de genre *deux*. A un point arbitraire de l'une d'elles, ne correspond qu'un couple de points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la courbe $y^2 = f(x)$.

D'une manière plus générale, on peut considérer les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une courbe C de genre p. Ici, de même que pour les surfaces hyperelliptiques, il convient de faire une distinction fondamentale entre le cas où un point de la surface répond à *un seul* couple de points sur la courbe C (surfaces générales d'après M. Picard) et le cas où un point de la surface correspond soit à *deux*, soit à *plusieurs* couples, comme la surface de Kummer en offre un exemple.

M. Rémy étudie certaines surfaces correspondant à des courbes de genre trois; la courbe C est alors, si l'on veut, et sans que la généralité soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre; les surfaces S considérées sont telles qu'à un point de S correspondent deux couples de points de C situés en ligne droite.

Plusieurs théorèmes généraux relatifs aux surfaces S sont établis et appliqués aux surfaces du sixième ordre possédant trois droites doubles concourantes et cinq plans tangents singuliers; ces surfaces peuvent être associées à une courbe plane C du quatrième ordre, de telle façon qu'à un point de la surface correspondent deux couples de points de C situés en ligne droite, et réciproquement; les cinq plans tangents singuliers et les plans du trièdre des trois droites doubles forment nécessairement un groupe de huit plans de Lamé.

Buhl (*A.*). — Sur la généralisation des séries trigonométriques (39-78).

Ce Mémoire rétablit d'abord diverses formes de développement en série trigonométrique, dont la plus habituelle est

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \cos k_\nu (x - \xi)\, d\xi,$$

avec

$$k_\nu = \frac{2\nu\pi}{\beta - \alpha}.$$

M. Buhl se propose d'étudier des séries analogues où k_ν est remplacé par $k_\nu + \psi$, ψ étant un paramètre arbitraire.

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIII, 1919, 2e Partie, p. 10.

Ces nouvelles séries, multipliées par $F(\psi)\,d\psi$, ou même par $F(x, \psi)\,d\psi$, et intégrées entre les limites ψ_0 et ψ_1, donneront des séries susceptibles de représenter $f(x)$, mais où, évidemment, les termes ne seront plus des sinus et des cosinus en x : ce sont là *les séries trigonométriques généralisées*.

Leur propriété la plus saillante est de représenter $f(x)$ dans un intervalle fondamental, tel l'intervalle α, β, et de représenter dans tous les autres intervalles de même amplitude et contigus les uns aux autres, des produits de $f(x)$ par des multiplicateurs en x qui peuvent être donnés à l'avance.

Certaines séries trigonométriques généralisées ont de remarquables propriétés de symétrie quant à l'ensemble de leurs coefficients; propriétés par lesquelles on peut notamment retrouver les développements de certaines fonctions méromorphes en séries de fractions rationnelles.

Le procédé de généralisation étudié donne naissance à des séries (A), (B), (C), (D), (D_1), (D_2) non distinctes au fond, ce qui permet de se borner à la considération du type (B) et permet de penser que de leur comparaison pourrait résulter une classification des séries trigonométriques.

L'auteur montre ensuite que les coefficients d'une série (B) se laissent rassembler en une série de formes quadratiques que l'on peut facilement sommer. A ce propos, les séries de Fourier, dont les coefficients sont des nombres, donnent naissance à des séries arithmétiques, tandis que les séries (B), dont les coefficients contiennent une fonction arbitraire ψ, donnent naissance à des séries de fractions rationnelles et à des relations entre ces séries.

Popovici (C.). — Sur les équations aux intégrales réciproques (79-106).

L'auteur appelle *équations aux intégrales réciproques* deux systèmes d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{u_{n-1}} = dx_n,$$

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n,$$

où $v_1, \ldots, v_{n-1}$ est le système fondamental d'intégrales premières des équations (1) et $u_1, \ldots, u_{n-1}$ le système fondamental d'intégrales premières des équations (2).

De tels systèmes intéressent à la fois l'Analyse, la Géométrie, la Mécanique.

Dans la première Partie de son Mémoire, M. Popovici traite le problème au point de vue de l'Analyse et de la Géométrie et en donne des applications à la théorie des groupes. Ici, deux catégories sont à distinguer :

1° Groupes d'opérations qui transforment un système donné d'intégrales en un nouveau système d'intégrales des mêmes équations linéaires;

2° Groupes qui transforment un système d'intégrales en un nouveau système appartenant aux équations non linéaires.

Cette dernière propriété de certains groupes permet de déduire d'un système de solutions connues une infinité de solutions dépendant de fonctions arbitraires.

Une seconde Partie donne une interprétation mécanique intéressante des résultats précédemment obtenus, qui permet de traiter une question générale de la dynamique : le mouvement produit par des forces fonctions de vitesses;

il se trouve en effet que les expressions les plus générales des vitesses, résultant d'un mouvement produit par des forces fonctions de vitesses, sont des solutions des équations aux intégrales réciproques. En particulier : si les expressions des forces sont algébriques, les trajectoires le sont aussi.

Haton de la Goupillière (*M.*). — Note sur les axes principaux du temps de parcours (107-124).

M. Haton de la Goupillière a donné dans les *Annaes scientificas da Academia polytechnica do Porto* (1906) une étude sur le centre de gravité du temps de parcours, c'est-à-dire du système matériel formé par l'émanation qu'abandonne un mobile sur les divers éléments de sa trajectoire proportionnellement au temps employé à les parcourir.

Cette notion de dissémination s'était déjà, à propos de la théorie de Pallase, présentée à Gauss; Bour l'avait aussi rencontrée pour l'évaluation du potentiel de la masse d'une planète répartie par la pensée le long de son orbite en raison du temps de la marche : mais la recherche du centre de gravité appartient en propre à M. Haton de la Goupillière.

L'objet de cette Note est d'introduire la troisième des théories fondamentales de la Géométrie des masses, à savoir celle des moments et des axes principaux d'inertie dans cet ordre de considérations.

Des formules générales sont établies et appliquées à diverses trajectoires, telles que la parabole, l'ellipse, la spirale logarithmique, les courbes $r = \cos^n\theta$, $r = \cos^n 2\theta$, $r^n = \cos n\theta$ (spirale sinusoïde), etc.

Lalesco (*T.*). — Sur l'équation de Volterra (125-202).

M. Lalesco développe et complète en certains points les recherches de M. Volterra sur l'équation fonctionnelle

$$\int_{\alpha}^{x} f(x, s)\varphi(s)\,ds = F(x),$$

qui est appelée équation intégrale de Volterra, et qui pourrait être considérée comme un cas limite de l'équation plus générale de Fredholm

$$\varphi(x) + \lambda\int f(x, s)\varphi(s)\,ds = \lambda F(x),$$

quand λ tend vers l'infini.

Comme on le sait, $f(x, s)$ est le *noyau* de l'équation; $\varphi(s)$ est la fonction inconnue.

La méthode d'intégration, utilisée par M. Volterra et par M. Fredholm, consiste à regarder l'équation proposée comme limite d'une équation aux différences.

Le Mémoire de M. Lalesco est divisé en deux Parties.

Première Partie. — Celle-ci débute par l'étude de la forme suivante de $f(x, s)$:

$$f(x, s) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} s + \ldots + A_0 s^n + f_1(x, s),$$

$f_1(x, s)$ étant une fonction dont tous les termes sont de degré supérieur à n en x et s : le problème qui consiste à déterminer $\varphi(s)$ dépend ici de l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n et d'approximations successives dans le sens des résultats fondamentaux obtenus par M. Picard. Si l'on fait l'hypothèse $A_0 + A_1 + \ldots + A_n \neq 0$, qui est implicitement admise dans les recherches de M. Volterra, cette équation différentielle linéaire d'ordre n est du type de Fuchs par rapport à $x = 0$, et c'est l'équation déterminante de l'origine qui joue le rôle essentiel dans le développement de la solution ; elle se réduit à une équation donnée par M. Volterra.

Le problème devient plus difficile si $A_0 + A_1 + \ldots + A_n = 0$, car il dépend alors de l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, qui peut admettre des intégrales irrégulières; M. Lalesco étudie complètement le cas où $n = 1$, et il généralise ainsi un résultat dû à M. Holmgren.

Le cas d'un noyau de la forme $\dfrac{G(x, s)}{(x-s)^{\lambda}}$ est alors abordé, puis l'équation

$$\int_{px}^{qx} f(x, s)\varphi(s)\,ds = F(x), \qquad p \text{ et } q \text{ constantes avec } \left(\frac{p}{q}\right) \neq 1,$$

est résolue, en appliquant une méthode due à M. Picard.

L'auteur montre ensuite que la méthode des approximations successives permet de traiter avec une grande simplicité : 1° le cas où l'on a deux variables indépendantes et une intégrale double; 2° le cas de deux ou n fonctions inconnues, de même que le type d'équations

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)]\,ds = F(x),$$

où les fonctions F et φ n'entrent plus linéairement.

Deuxième Partie. — Il est d'abord montré qu'une équation de Volterra, dont le noyau est une fonction entière de x d'ordre plus petit que 1, équivaut à une équation différentielle linéaire d'ordre infini d'un type spécial, correspondant à un système déterminé d'équations différentielles linéaires d'ordre infini, à une infinité de fonctions inconnues. Ce système a une infinité de solutions linéairement indépendantes et l'intégration d'une équation déterminée de Volterra revient à l'intégration d'un pareil système, avec des conditions initiales qui déterminent complètement la solution ; celle-ci sera donc, en général, une fonction multiforme à une infinité de branches et dont les points critiques, ordinairement transcendants, et dénommés par M. Boutroux de première espèce, seront les racines d'une certaine fonction entière.

Il en résulte, comme cas particulier, que les équations différentielles linéaires d'ordre fini pourront toujours être transformées en équations de Volterra; M. Lalesco obtient ainsi un développement de leurs intégrales qui est valable dans tout leur domaine d'existence.

En résumé, l'auteur de ce travail a traité des équations intégrales se rattachant au type étudié par M. Volterra, mais plus complexes que celles-ci; en outre, il est retombé sur la théorie des équations différentielles linéaires.

Diverses applications illustrent ce Mémoire ([1]).

([1]) Cf. *B. S. M.*, t. XXXV, 1911, 1re Partie, p. 205; *C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 142; t. 152, 1911, p. 579.

Hamy (M.). — Sur l'approximation des fonctions de grands nombres (203-281).

M. Flamme a étendu les résultats fondamentaux de Darboux aux intégrales

$$I = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

où n désigne un entier positif très grand $\left(\text{le cas de } n \text{ négatif se ramenant à celui-ci par le changement de } z \text{ en } \frac{1}{z}\right)$, lorsque la fonction $\Phi(z)$ possède un ou plusieurs points singuliers séparés de l'origine par le contour d'intégration, les extrémités de ce contour étant, en outre, plus éloignées de l'origine des coordonnées que l'un au moins de ces points singuliers.

M. Hamy, à propos de certaines questions se rattachant à l'étude de la fonction perturbatrice, s'est occupé, en premier lieu, de déterminer l'expression asymptotique de l'intégrale I : 1° en s'affranchissant de la restriction que n est entier; 2° en examinant toutes les positions que le contour peut présenter par rapport à l'origine des coordonnées. Il obtient l'expression asymptotique de l'intégrale I, non seulement lorsque le développement de $\Phi(z)$ est algébrique dans le voisinage du point du plan dont la considération est nécessaire pour l'évaluation approchée de cette intégrale, mais encore lorsque ce développement contient des termes de la forme $(z-a)^\alpha \log^q(z-a)$, où q est un entier positif.

En second lieu, M. Hamy aborde le problème plus général de la détermination de l'expression asymptotique de l'intégrale

$$J = \int f(z) \varphi^n(z)\, dz,$$

n étant un grand nombre quelconque.

Son étude développe celles, antérieures, de Laplace et de Darboux.

D'abord, si l'on admet que la plus grande valeur $|\varphi(z)|$ le long du chemin d'intégration corresponde à l'une des extrémités $z = c$ de ce contour (convenablement déformé, s'il est nécessaire), on peut toujours obtenir la valeur asymptotique de J, sous condition que les développements de $f(z)$ et de $\varphi(z)$, dans le voisinage de $z = c$, puissent être mis sous la forme

$$f(z) = B_1(z-c)^{\beta_1} \log^{q_1}(z-c) + B_2(z-c)^{\beta_2} \log^{q_2}(z-c) + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \varphi(c) + A_1(z-c)^{\alpha_1} + A_2(z-c)^{\alpha_2} + \ldots,$$

les α désignant des nombres positifs, les q des entiers positifs ou nuls et les β des quantités supérieures à -1.

L'expression asymptotique de J peut encore être obtenue dans des cas très généraux quand $|\varphi(z)|$ ne prend pas sa plus grande valeur à une extrémité du contour d'intégration.

Une bibliographie étendue résume les travaux antérieurs relatifs à cette question.

Heywood (B.). — Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm (283-330).

Les deux équations

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s), \\ \psi(t) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(t) \end{cases}$$

sont les équations fonctionnelles associées de Fredholm relatives au noyau $K(s, t)$. Les fonctions $K(s, t)$, $f(s)$ étant connues, on cherche à déterminer $\varphi(s)$, $\psi(t)$. Les limites d'intégration sont fixes.

M. Fredholm a démontré (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903) que les solutions des équations (α) dépendent d'une certaine fonction résolvante $K(s, t, \lambda)$ qui satisfait aux équations

$$-K(s, t) + K(s, t, \lambda) = \lambda \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda)\,d\tau = \lambda \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t)\,d\tau.$$

Les deux expressions

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t, \lambda) f(t)\,dt.$$

$$\psi(t) = f(t) + \lambda \int K(s, t, \lambda) f(s)\,ds$$

sont les équations uniques des équations (α).

Deux noyaux $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ sont orthogonaux quand ils satisfont aux relations

$$\int K_1(s, \tau) K_2(\tau, t)\,d\tau = \int K_2(s, \tau) K_1(\tau, t)\,d\tau = 0.$$

M. Heywood démontre que la résolvante relative au noyau

$$K(s, t) = K_1(s, t) + K(s, t)$$

est la somme des résolvantes relatives à ces deux noyaux, autrement dit que

$$K(s, t, \lambda) = K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda),$$

proposition que M. Goursat avait aussi rencontrée (*C. R.*, t. 145, 1907, p. 667 et 752).

L'auteur examine les relations qui existent entre les discontinuités de $K(s, t)$ et celles de la résolvante $K(s, t, \lambda)$, puis s'attache à l'étude des fonctions fondamentales des noyaux $K(s, t)$, c'est-à-dire des fonctions $\varphi(s)$, non identiquement nulles, satisfaisant à une relation

$$\varphi(s) = c \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Il est intéressant de remarquer que les solutions des équations sans seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t)\, dt = 0, \qquad \psi(t) - \lambda_1 \int K(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0$$

sont des fonctions linéaires homogènes d'un nombre moindre de fonctions fondamentales.

On peut appliquer facilement les théories qui précèdent à des exemples. Étant donné un système biorthogonal quelconque, c'est-à-dire un double système

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots; \qquad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \qquad (n \text{ fini ou infini})$$

pour lequel

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \psi_k(x)\, dx \neq 0,$$

divisons-le en groupes de fonctions et construisons avec chaque groupe une partie fondamentale à laquelle sera attachée la constante caractéristique qu'on voudra; les constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$ seront les zéros de la fonction

$$D(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{n!} \int\int \cdots \int \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & K(s_1, t_2) & \ldots & K(s_1, t_n) \\ K(s_2, t_1) & K(s_2, t_2) & \ldots & K(s_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_n, t_1) & K(s_n, t_2) & \ldots & K(s_n, t_n) \end{vmatrix};$$

la somme de ces parties, supposée uniformément convergente, est un noyau dont on connaîtra les constantes caractéristiques, les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales.

Le problème *inverse*, consistant à déterminer le système biorthogonal d'un noyau donné, est résolu par la méthode de Fredholm.

M. Heywood étudie ce problème par une méthode qui consiste à séparer le noyau en plusieurs parties orthogonales et à déterminer toutes les parties fondamentales.

Goursat (E.). — Sur les invariants intégraux (331-365).

Le but de ce Mémoire est d'apporter une contribution à l'étude de la question générale suivante : connaissant un invariant intégral, absolu ou relatif, d'un ordre quelconque, d'un système d'équations différentielles, quel parti peut-on en tirer pour l'intégration de ce système ?

Soit

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$$

un système d'équations différentielles; les fonctions X_i sont supposées uniformément continues, ainsi que leurs dérivées; elles ne renferment pas t; on appelle *caractéristique* toute multiplicité à une dimension Γ_1, représentée par les équations

$$x_1 = f_1(t), \qquad x_2 = f_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n(t),$$

où $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ forment un système de solutions des équations (1). De chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de l'espace à n dimensions part une caractéristique Γ, qui est décrite par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lorsque t varie.

La valeur initiale de t étant supposée nulle, considérons dans l'espace à n dimensions une multiplicité quelconque à p dimensions (E_p^0); de chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de cette multiplicité part une caractéristique et, au bout du temps t, le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ est venu en $(x_1, \ldots, x_n)$. Le lieu de ces différents points est une autre multiplicité à p dimensions (E_p). Si l'intégrale multiple

$$I_p = \int\int\cdots\int \Sigma A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2}\ldots dx_{\alpha_p}$$

a la même valeur pour les deux multiplicités (E_p^0) et (E_p), quel que soit t, on dit que I_p est un invariant intégral *absolu* d'ordre p du système [1].

Il peut se faire que cette propriété d'invariance n'ait lieu que pour les multiplicités fermées; on dit alors qu'on a un invariant intégral *relatif* d'ordre p, et on le désigne par le symbole J_p.

M. Goursat montre que de tout invariant intégral on peut déduire au moins un système d'équations différentielles dont toutes les intégrales appartiennent au système proposé, et dont l'intégration est en général un problème plus simple. Dans le cas où les deux systèmes sont équivalents, on peut déterminer un multiplicateur.

Buhl (*A.*). — Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe (367-377).

Les procédés de sommation envisagés ici peuvent s'appliquer à des séries assez diverses, mais les développements ultérieurs que leur a donnés M. Buhl ont eu particulièrement trait à la représentation des fonctions uniformes par des séries de polynomes tayloriens [2].

La méthode essentielle peut s'exprimer très brièvement en prenant pour exemple la fonction

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Soit s_n le polynome *taylorien* constitué par les n premiers termes du second membre; soit en outre une fonction *entière*

$$f(\xi) = \Sigma\gamma_n \xi^n = \Sigma c_n;$$

multipliant (1) par c_n et sommant, pour l'indice n, on aura

$$(2) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \frac{f(\xi x)}{f(\xi)}\,\frac{1}{1-x}$$

et (1) sera développée en séries de polynomes s_n si $f(\xi_n)$ est toujours nul sans que $f(\xi)$ le soit.

C'est alors qu'on peut faire jouer, dans ces formules de sommabilité, un rôle essentiel aux fonctions $f(\xi)$, *pourvues de zéros*; les premières méthodes de M. Borel font intervenir, au contraire, des fonctions dépourvues de zéros.

---

[1] Cf. *J. M. P. A.*, 7e série, t. I, 1915.

[2] *B. S. M.*, t. XXXII, 1908; *Acta Mat.*, 1911.

La formule (2) s'étend facilement aux fonctions méromorphes quelconques et même aux fonctions en lesquelles des singularités de nature polaire finissent par former une ligne continue qui est alors essentielle [2].

M. Buhl insiste, en général, sur le rôle de la fonction ϖ, comme fonction sommatrice [1].

Wolfskehl (P.) — Prix Wolfskehl (378).

Le Dr P. Wolfskehl a fondé un prix de 100000 marks, qui sera délivré au premier auteur d'une démonstration du grand théorème de Fermat : *L'équation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ n'a de solution entière pour aucun des exposants λ qui sont des nombres premiers impairs.*

Se reporter au *J. M. P. A.* pour les conditions subsidiaires de l'attribution du prix.

L'intérêt mathématique de ce prix réside moins dans le fait même de la démonstration du théorème de Fermat (actuellement démontré pour $\lambda \leqq 100$), que dans les théories auxquelles la recherche de la démonstration pourrait donner naissance.

Humbert (G.). — Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques, binaires et positives (379-393).

Dans un Mémoire publié au Tome III (6e série), 1907, de ce *Journal*, M. Humbert a rencontré des formules où figurent les minima des classes de même déterminant : le présent travail a pour but de compléter ces résultats, en se bornant toutefois à six relations, qui expriment certaines sommes algébriques simples de minima à l'aide de fonctions numériques liées aux diviseurs d'un nombre.

On appelle *minima* d'une classe de formes quadratiques binaires et positives les trois plus petits entiers représentables *proprement* par les formes de la classe. La réduite de cette classe étant (a, b, c), les trois minima sont

$$a, \quad c, \quad a + c - 2|b|.$$

M. Humbert se borne aux classes de l'*ordre propre* (primitives ou non), c'est-à-dire dont les formes n'ont pas leurs deux coefficients extrêmes pairs à la fois ; dès lors, parmi les minima, deux sont impairs, un est pair.

Les relations entre les minima de certaines classes conduisent à des théorèmes d'arithmétique, par exemple à celui-ci : *il existe quatre sommes algébriques de minima*, que l'auteur définit, *qui s'expriment à l'aide de deux seules fonctions numériques* $\omega(n)$, $\chi(n)$; diverses propriétés intéressantes des fonctions numériques ψ, χ, ω en résultent, ainsi qu'un rapprochement très remarquable entre les sommes de minima et la fonction numérique classique qui représente le nombre de décompositions d'un entier en sommes de cinq carrés.

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 21 mai 1918.

(2) *B. S. M.*, t. XXXII, 1908 ; *Acta Mat.*, 1911.

Bachelier (*L.*). — Étude sur les probabilités des causes (395-425) (1).

M. Bachelier reprend la théorie de la probabilités des causes et des événements en l'étendant à un nombre quelconque d'alternatives : car, d'ordinaire, on étudie seulement le cas où il n'y a que deux alternatives possibles.

L'auteur ne fait pas l'hypothèse que toutes les alternatives sont *a priori* également vraisemblables; son étude envisage d'autres lois de probabilité et le conduit à des résultats qui, pour certains problèmes, sont indépendants de ces lois.

La recherche des probabilités des causes exigeant la connaissance de la probabilité des effets, M. Bachelier débute par l'étude des probabilités des effets, étendue au cas de plusieurs variables. Comme dans le cas de deux alternatives, la formule de Stirling, qui donne la valeur approchée de $\Gamma(n+1)$, joue ici un grand rôle.

Divers problèmes sont résolus et illustrent les raisonnements généraux.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 164 (1er semestre 1917) (2).

Bigourdan (*G.*). — Sur le principe d'une nouvelle lunette zénithale (18).

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux K des quadriques générales, etc. (26).

Julia (*G.*). — Sur la réduction des formes binaires à coefficients réels de degré quelconque (32).

Hardy (*G.-H.*) et *Ramanujan* (*S.*). — Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n (35).

Belot (*E.*). — Les théories des nébuleuses spirales et le sens véritable de leur rotation (39).

Hamy (*M.*). — Sur la valeur approchée d'une intégrale définie (68).

---

(1) Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 146, 1908, p. 1085.

(2) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 162 et 163, 2e p., p. 111-120.

Appell (*P.*). — Sur une extension des équations de la théorie des tourbillons et des équations de Weber (71).

Sparre (*de*). — Calcul du coup de bélier dans une conduite forcée, formée de deux sections de diamètres différents (77).

Young (*W.-H.*). — Sur une nouvelle suite de conditions pour la convergence des séries de Fourier (82).

Petrovitch (*M.*). — Limite d'extensibilité d'un arc de courbe d'allure invariable (85).

Souslin (*M.*). — Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis (88).

Lusin (*N.*). — Sur la classification de M. Baire (91).

Hartmann (*L.*). — Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps (94).

Olive (*J.*). — Sur le tracé mécanique de l'hodographe balistique (97).

Esclangon (*E.*). — Sur la réflexion et la réfraction d'ondes isolées à la surface de séparation de deux fluides en repos ou en mouvement (99).

Belot (*E.*). — Tracé provisoire de la courbe décrite par le Pôle magnétique boréal depuis 1541 (113).

Bigourdan (*G.*). — Les premières Sociétés scientifiques de Paris au XVIIe siècle. Les réunions du P. Mersenne et l'Académie de Montmor (129).

Ariès (*E.*). — La loi de l'entropie moléculaire des fluides, pris à des états correspondants (134).

Khintchine (*A.*). — Sur la dérivation asymptotique (142).

Arctowski (*H.*). — Positions héliographiques des taches solaires et orages magnétiques (145).

Raclot. — Sur l'origine du magnétisme terrestre (150).

Bigourdan (*G.*). — Les premières réunions savantes de Paris. L'Académie de Montmor (159).

Appell (*P.*). — Présente à l'Académie un Mémoire en russe par M. Riabouchinsky, intitulé : Sur la résistance de l'air (163).

Gambier (*B.*). — Sur l'identité de Bézout (165).

Petrovitch (*M.*). — Valeur de l'action le long de diverses trajectoires (166).

Mesnager. — Formule en série simple de la plaque uniformément chargée, encastrée sur un contour rectangulaire plan (169).

Sauger (*M.*). — Sur l'énergie possédée par la Terre du fait de sa rotation sur elle-même, quand on admet pour la densité à son intérieur la loi de variation $d = 10\left(1 - 0,76\frac{r^2}{R^2}\right)$ (172).

Belot (*E.*). — L'hypothèse satellitaire et le problème orogénique (188).

Lallemand (*C.*). — Une mission économique française en Espagne (210).

Perrier (*E.*). — Complément à l'exposé de M. C. Lallemand (213).

Bigourdan (*G.*). — Les premières réunions savantes de Paris au XVII[e] siècle. Les Académies de Montmor, de Sourdes, etc. (216).

Renaud (*J.*). — L'heure à bord des navires (221).

Ardowski (*H.*). — Sur une corrélation entre les orages magnétiques et la pluie (227).

Angot (*A.*). — Valeur des éléments magnétiques à l'Observatoire du Val-Joyeux, au 1[er] janvier 1917 (229).

Bigourdan (*G.*). — Sur quelques anciens Observatoires de la région provençale au XVIIe siècle. L'Observatoire d'Avignon (253).

Lecornu (*L.*). — Sur la mesure du temps légal (259).

Ariès (*E.*). — La loi observée par les quatre fonctions de Massieu, pour les corps pris à des états correspondants (261).

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (265).

Young (*W.-H.*). — Sur la théorie de la convergence des séries de Fourier (267).

Delassus (*E.*). — Sur la notion générale de mouvement pour les systèmes holonomes et non holonomes (270).

Jouguet (*E.*). — Sur la stabilité séculaire (272).

Villat (*H.*). — Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité (275).

Grandjean (*F.*). — Sur l'application de la théorie du magnétisme aux liquides anisotropes (280).

Lippmann (*G.*). — Sur quelques décisions prises par les gouvernements de la Grande-Bretagne et des États-Unis (293).

Mesnager. — Solution simple du problème A. de Mathieu (302).

Ledoux (*A.*). — Nouvelle méthode pour la détermination de l'indice de réfraction des substances liquides (305).

Bigourdan (*G.*). — Sur quelques Observatoires des régions boréales de la France au XVIIe siècle (322).

Fournier. — Position relative du maître-couple la plus favorable à la vitesse d'une carène en navigation ordinaire (329).

Camichel (C.). — Sur le calcul des grandes surpressions dans les conduites munies d'un réservoir d'air (331).

Arsonval (A. d'). — Éloge funèbre de M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel, décédé le 23 février 1917 (339).

Lacroix (A.). — Complément à l'Eloge de M. d'Arsonval (341).

Ariès (E.). — L'entropie des gaz parfaits au zéro de la température absolue (343).

Julia (G.). — Sur les formes binaires à coefficients et indéterminées complexes, de degré quelconque (352).

Bigourdan (G.). — Sur quelques Observatoires du XVIIe siècle, en province (375).

Giraud (G.). — Sur les fonctions hyperfuchsiennes et sur les systèmes d'équations aux différentielles totales (386).

Cotton (E.). — Nombre caractéristique et rayon de convergence (389).

Montessus de Ballore (R. de). — Sur les courbes gauches algébriques (392).

Belot (E.). — Le rôle possible des volcans de satellites dans la production des météores (395).

Abonnenc (L.). — Sur les lois de l'écoulement des liquides par gouttes dans des tubes cylindriques (402).

Montessus de Ballore (R. de). — Sur les courbes gauches algébriques (428).

Hamy (M.). — Valeurs approchées de quelques intégrales définies (457).

Bigourdan (G.). — Sur l'emplacement et les coordonnées de quelques stations astronomiques de Paris, utilisées pendant la construction de l'Observatoire (461).

Ariès (*E.*). — Sur la tension de la vapeur saturée aux basses températures et sur la constante chimique (477).

Lebon (*E.*). — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres (482).

Julia (*G.*). — Sur la réduction des formes binaires de degré quelconque à coefficients indéterminés réels ou complexes (484).

Giraud (*G.*). — Sur les fonctions hyperfuchsiennes (487).

Buhl (*A.*). — Sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Cas des cyclides (489).

Hartmann (*L.*). — Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps (491).

Leduc (*A.*). — Chaleurs de vaporisation et pressions maxima des vapeurs (494).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire présenté au nom de la Commission de Balistique (506).

Bompiani (*E.*). — Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à n ($n > 3$) dimensions (508).

Kogbetliantz (*E.*). — Sur la sommation des séries ultrasphériques (510).

Belot (*E.*). — L'origine possible des amas d'étoiles (513).

Bigourdan (*G.*). — Sur l'emplacement et les coordonnées de l'Observatoire de la porte Montmartre (537).

Lallemand (*C.*). — L'heure à bord des navires (544).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire présenté au nom de la Commission de Balistique (549).

Picard (*E.*). — Discours prononcé (le 10 avril 1917) en prenant place au Bureau comme Secrétaire perpétuel (557).

Le Chatelier (*H.*). — Le Conseil national de recherches aux États-Unis (559).

Puiseux (*P.*) et *Jekhowsky* (*B.*). — Étude sur la forme générale du globe lunaire (562).

Julia (*G.*). — Sur la réduction des formes à indéterminées conjuguées non quadratiques (571).

Le Chatelier (*H.*). — La synthèse de l'ammoniaque (588).

Ariès (*E.*). — Les coefficients de la thermo-élasticité aux basses températures et l'hypothèse de M. Nernst (593).

Riquier. — Sur une propriété des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables imaginaires (598).

Mesnager. — Sur la représentation des charges concentrées par des séries trigonométriques (600).

Deslandres (*H.*). — Influence des canonnades intenses et prolongées sur la chute de la pluie (613).

Lemoine (*G.*). — Observations sur la Communication de M. Deslandres (615).

Julia (*G.*). — Sur la réduction des formes à indéterminées conjuguées non quadratiques (619).

Young (*W.-H.*). — Sur la dérivation des fonctions à variation bornée (622).

Boussinesq (*J.*). — Hypothèses fondamentales de la mécanique des masses pulvérulentes (657).

Sebert (*le général*). — Les violentes canonnades peuvent-elles provoquer la pluie? (663).

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux O de Monge dans un espace d'ordre quelconque (680).

Sparre (de). — Au sujet des coups de bélier dans une conduite formée de trois sections de diamètres différents pour lesquelles la durée de propagation est la même (683).

Picard (E.). — Sur l'Ouvrage de G. Darboux, intitulé : « Les Principes de la Géométrie analytique » (697).

Boussinesq (J.). — Orientation des pressions principales, dans l'état ébouleux (par déformations planes), d'une masse sablonneuse pesante à profil supérieur rectiligne (698).

Sebert (le général). — Complément d'observations au sujet de l'influence possible des canonnades violentes sur la chute de la pluie (703).

Petrovitch (M.). — Sur quelques expressions numériques remarquables (716).

Jekhowsky (B.). — Sur le développement en série de diverses expressions algébriques au moyen des fonctions de Bessel à plusieurs variables (719).

Mesnager. — Solution du problème de la plaque rectangulaire « épaisse » posée, chargée d'un poids unique en son milieu (721).

Procopiu (S.). — Sur la concentration des électrolytes au voisinage des électrodes (725).

Boussinesq (J.). — Solutions du problème de la poussée voisines de celle de Rankine et Maurice Lévy pour les massifs sablonneux et les murs de soutènement à profil rectiligne (755).

Ariès (E.). — Sur la valeur absolue de l'entropie et de l'énergie (774).

Kogbetliantz (E.). — Sur la sommation des séries ultrasphériques (778).

Pétrovitch (M.). — Théorèmes arithmétiques sur l'intégrale de Cauchy (780).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire de la Commission de Balistique (805).

Fatou (*P.*). — Sur les substitutions rationnelles (806).

Décombe (*L.*). — Influence de la températare sur les phénomènes électrocapillaires (808).

Ballif (*L.*). — Sur la détermination de la densité de l'air en fonction de l'altitude (827).

Lefschetz (*S.*). — Sur les intégrales multiples des variétés algébriques (850).

Kryloff (*N.*). — Sur les généralisations de la méthode de Walter Ritz (853).

Fériet (*J. Kampé de*). — Sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales (856).

Sizes (*G.*). — Les crutis de la musique des Hindous, les tiers de ton de celle des Arabes et l'acoustique musicale (861).

Boussinesq (*J.*). — Intercalation d'un massif sablonneux homogène donné, mais dont l'état ébouleux a ses équations inintégrables, entre deux certains massifs hétérogènes de même figure, qui se prêtent facilement aux calculs d'équilibre-limite (873).

Montel (*P.*). — Sur la représentation conforme (879).

Sierpinski (*W.*). — Sur quelques problèmes qui impliquent des fonctions non mesurables (882).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire présenté au nom de la Commission de Balistique (909).

Julia (*G.*). — Sur les formes biquadratiques à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers (910).

Boussinesq (*J.*). — Équilibre-limite (par détente) d'une masse sablonneuse à profil supérieur rectiligne et que soutient en avant une mince paroi plane verticale, mobile autour de sa base (929).

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces telles que l'équation de Laplace du réseau formé par les lignes de courbure soit intégrable (935).

Birkhoff (*G.-D.*). — Sur une généralisation de la série de Taylor (942).

Duport (*H.*). — La loi de l'attraction universelle (945).

Sauger (*M.*). — Sur la durée de chute d'une pierre au centre de la Terre (954).

Bigourdan (*G.*). — Sur les observations attribuées au prince Louis de Valois et sur l'astronome Jacques Valois (975).

Ariès (*E.*). — Sur la chaleur spécifique des fluides maintenus à l'état de saturation (986).

Julia (*G.*). — Sur les formes binaires à indéterminées conjuguées qui restent invariantes par un groupe de substitutions linéaires (991).

Sierpinski (*W.*). — Sur une extension de la notion de densité des ensembles (993).

Jablonski (*E.*). — Contribution à l'étude du cas le plus général du choc dans un système de points matériels soumis à la loi de Newton (995).

Belot (*E.*). — Sur quelques principes applicables à la Planétographie comparée (997).

Dufour (*P.-T.*). — Recherches expérimentales sur le tétraèdre terrestre et distribution des terres et des mers (1001).

Tome 165 (2e semestre 1917).

Boussinesq (*J.*). — Équilibre-limite (par détente), contre un mur vertical qui commence à se renverser, d'une masse sablonneuse dont la surface supérieure plane a une déclivité atteignant presque celle de terre coulante (5).

Gouy (*G.*). — Des effets des chocs moléculaires sur les spectres des gaz (17).

Akimoff (*M.*). — Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables (23).

Ariès (*E.*). — Sur le signe de la chaleur spécifique de la vapeur saturée, au voisinage de l'état critique (51).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire de la Commission de Balistique (54).

Thybaut (*A.*). — Sur les courbes tautochrones (55).

Bigourdan (*G.*). — Un astronome-jardinier du XVIIe siècle : Elzéar Féronce, Calignon de Peyrins et la réciprocation du pendule (84).

Gouy (*G.*). — Sur les interférences à grande différence de marche (88).

Appell (*P.*). — Rapport présenté au nom de la Section de Géométrie, sur un Mémoire de M. H. Duport intitulé : « Sur la loi de l'attraction universelle » (94).

Priwaloff (*J.*). — Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées (96).

Vessiot (*E.*). — Sur les équations canoniques et sur les développements en série de la Mécanique céleste (99).

Amsler. — Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique (102).

Hegly (*V.-M.*). — Sur l'écoulement en déverseur par nappe libre avec contraction latérale (105).

Procopiu (*S.*). — Appareil d'induction pour la recherche des projectiles (109).

Lallemand (*C.*). — A propos de l'extension, à la mer, du régime des fuseaux horaires (131).

Leau. — Sur la mesure des ensembles linéaires (141).

Tournier. — Détermination expérimentale du rendement (machines et chaudières marines) (144).

Vâlcovici (*V.*). — Sur la position du point d'arrêt dans le mouvement de rotation uniforme (147).

Bigourdan (*G.*). — Sur la propagation à grande distance de l'onde de bouche du canon (170).

Belot (*E.*). — L'histoire physique et balistique des volcans lunaires (177).

Humbert (*G.*). — Sur la fraction continue de Stephen Smith (211).

Hildebrandson (*H.*). — Quelques mots sur l'influence possible des grandes canonnades sur la pluie (227).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire présenté au nom de la Commission de Balistique (231).

Humbert (*G.*). — Sur la réduction (mod. 2) des formes quadratiques binaires (253).

Cahen (*E.*). — Sur la suite de meilleure approximation absolue pour un nombre (262).

Humbert (*G.*). — Quelques propriétés des formes quadratiques binaires indéfinies (298).

Deslandres (H.). — Contribution à l'influence présumée de la canonnade sur la chute de la pluie. Opinion de M. C. Saint-Saëns (304).

Humbert (G.). — Quelques propriétés des formes quadratiques binaires indéfinies (321).

Remoundos (G.). — Sur la classification des points transcendants des inverses des fonctions entières ou méromorphes (331).

Duport (H.). — Sur les systèmes orthogonaux (354).

Humbert (P.). — Sur les ombilics de la surface piriforme (357).

Fréchet (M.). — Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits (359).

Petrovitch (M.). — Un nouveau procédé d'évaluation numérique des coefficients des séries (388).

Sizes (G.). — Modifications pratiques à la « loi de résonance des corps sonores » et rectification à la Note sur les gongs chinois (405).

Angelesco. — Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques (419).

Sierpiński (W.) et *Lusin (N.).* — Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables (422).

Majorand (Q.). — Démonstration expérimentale de la constance de vitesse de la lumière réfléchie par un miroir en mouvement (424).

Benediks (C.). — Sur l'effet thermoélectrique par étranglement dans le cas du mercure (426).

Young (W.-H.). — Sur la théorie des séries trigonométriques (460).

Tannenberg (*W. de*). — Sur une équation fonctionnelle et les courbes unicursales sphériques (624).

Camichel (*C.*), *Eydoux* (*D.*) et *Gariel* (*M.*). — Sur les coups de bélier ; calcul des pressions en un point quelconque de la conduite (626).

Véronnet (*A.*). — Absorption de l'eau sur la Lune et les planètes (629).

Fréchet (*M.*). — Les fonctions prolongeables (669).

Crémieu (*V.*). — Nouvelles recherches expérimentales sur la gravitation (670).

Humbert (*G.*). — Sur le développement, en fraction continue de Stephen Smith, des irrationnelles quadratiques (689).

Appell (*P.*). — Expériences de M. Carrière sur le mouvement aérien de balles sphériques légères, tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire (694).

Young (*W.-H.*). — Sur les séries des polynomes de Legendre (696).

Humbert (*P.*). — Réduction de l'équation des jacobiens critiques (699).

Arctowski (*H.*). — Orages magnétiques, facules et taches solaires (713).

Humbert (*G.*). — Sur le développement, en fraction continue de Stephen Smith, des irrationnelles quadratiques (737).

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux C tels que l'équation de Laplace qui y correspond soit intégrable (755).

Humbert (*P.*). — Expression de la fonction de Legendre de seconde espèce (759).

Ventre (*F.*). — Théorème sur les charges roulantes (761).

Picard (*E.*). — Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann (777).

Tannenberg (*W. de*). — Sur une question d'analyse indéterminée (783).

Bosler (*J.*). — Les météorites et l'excentricité terrestre (784).

Fatou (*P.*). — Sur les substitutions rationnelles (992).

Baticle (*E.*). — Sur la détermination des dimensions les plus avantageuses des principaux éléments d'une installation de force hydraulique (995).

Mesnager. — Sur la démonstration rigoureuse des formules des poutres et des plaques (997).

Hardy (*G.-H.*) et *Littlewood* (*J.-E.*). — Sur la convergence des séries de Fourier et des séries de Taylor (1047).

Guillet. — Mesure de l'intensité du champ de pesanteur : Pendule de Galilée et tube de Newton (1050).

Chandon (*Mme E.*). — Sur une détermination à l'astrolabe à prisme de la latitude de l'Observatoire de Paris (1053).

Véronnet (*A.*). — Sur la loi des densités à l'intérieur d'une masse gazeuse (1055).

Schaffers (*V.*). — Le son du canon à grande distance (1057).

Hubert (*H.*). — Sur l'emploi du stéréoscope pour l'examen de projections superposées (1059).

Lacroix (*A.*). — L'éruption du volcan de Quetzaltepeque et le tremblement de terre destructeur de San Salvador (juin-juillet 1917) (1077).

Hamy (*M.*). — Sur un cas particulier de diffraction des images des astres circulaires (1082).

Ariès (*E.*). — Sur la nécessité d'améliorer l'équation d'état de Clausius (1088).

Blondel (*A.*). — Mesure directe de l'angle de décalage intérieur d'un alternateur et de la « torsance » (résistance transversale globale) (1092).

Appell (*P.*). — Rapport sommaire de la Commission de Balistique (1096).

Humbert (*G.*). — Rapport sur une Communication de M. G. Julia, intitulée : « Sur les substitutions rationnelles » (1096).

Julia (*G.*). — Sur les substitutions rationnelles (1098).

Akimoff. — Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables (1100).

Mesnager. — Sur la démonstration rigoureuse des formules des poutres rectangulaires et des plaques (1103).

Léauté (*A.*). — Complément à la théorie de M. Blondel sur la réaction d'induit des alternateurs (1106).

Er. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 166, 1er semestre 1918 (1).

Appell (*P.*). — Mouvements aériens gauches de sphères pesantes légères (22-23).

A la suite d'expériences de M. Carrière, l'auteur est amené à formuler l'hypothèse suivante : La résistance de l'air, au lieu de donner lieu à une force $R = mg\varphi(V)$ dirigée en sens inverse de la vitesse V du point G, s'obtient en faisant tourner le vecteur GR d'un angle aigu α autour de l'axe instantané et en sens inverse de la rotation instantanée. Cet angle α est une fonction croissante de la valeur absolue de la rotation et s'annule en même temps que celle-ci.

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIII, 2e p., p. 27.

Giraud (*G.*). — Sur les fonctions hyperabéliennes (24-25).

L'auteur étend aux fonctions hyperabéliennes de M. E. Picard les résultats obtenus par lui pour les fonctions hyperfuchsiennes; il montre comment on peut trouver le polyèdre fondamental d'un groupe hyperabélien et discuter ainsi la nature des singularités des fonctions du groupe; on en conclut que trois de ces fonctions sont liées par une relation algébrique et qu'elles s'expriment toutes en fonctions rationnelles de trois d'entre elles.

Lattès (*S.*). — Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré (26-28).

Soit $z_1 = \mathrm{R}(z)$ une substitution rationnelle dont les points invariants sont distincts, et α un de ces points de multiplicateur S, avec $|\mathrm{S}| > 1$. H. Poincaré a démontré l'existence d'une fonction méromorphe $\theta(u)$, telle que

$$\theta(\mathrm{S}u) = \mathrm{R}[\theta(u)], \qquad \theta(0) = \alpha.$$

Donc, si l'on pose $z = \theta(u)$, on aura $z_1 = \theta(\mathrm{S}u)$, etc.

L'auteur montre que les problèmes relatifs à l'itération de la substitution donnée sont ainsi transformés en problèmes relatifs à la croissance de $\theta(u)$.

La méthode se généralise aux substitutions à deux variables au moyen des fonctions de Poincaré généralisées.

Chokhate (*J.*). — Sur quelques propriétés des polynomes de Tchebicheff (28-30).

Formules donnant des limites supérieure et inférieure des coefficients.

Denjoy (*A.*). — Sur une propriété générale des fonctions analytiques (31-33).

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction analytique de la forme $(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n} \mathrm{G}(x)$, les a et α étant constants. L'auteur démontre que : Si les points a_i sont intérieurs à un contour simple C, dans lequel G est régulier et non nul, et si l'argument de $\mathrm{F}(x)$ varie dans un sens constant quand x décrit C :

1° $\mathrm{F}'(x)$ possède $(n-1)$ zéros b_k distincts des a_i à l'intérieur de C.

2° Toute courbe d'équation arc $\mathrm{F}(x) =$ const. ayant un arc intérieur à C passe, soit en un point a_i, soit en un point b_k.

Julia (*G.*). — Sur l'itération des fractions rationnelles (61-64).

Soit $z_1 = \varphi(z)$ une fraction rationnelle et la suite des conséquents

$$z_i = \varphi(z_{i-1}) = \varphi_i(z).$$

Soit $\mathrm{Z}(z)$ un point limite de l'ensemble des z_i : le problème fondamental de l'itération consiste à trouver les points essentiels de $\mathrm{Z}(z)$. L'auteur le résout par la considération de l'ensemble E des racines des équations $z = \varphi_n(z)$ pour

lesquelles $|\varphi'_n(z)| > 1$. Cet ensemble est dénombrable et admet un dérivé E′ qui est parfait : *la fonction* $Z(z)$ *est analytique dans toute région du plan dont aucun point intérieur n'appartient à* E′. Si R est une telle région, d'un seul tenant, n'ayant pour points frontières que des points de E′, ces points frontières sont tous essentiels pour $Z(z)$.

Ocagne (*M. d'*). — Sur les surfaces gauches circonscrites à une surface donnée le long d'une courbe donnée (64-66).

Une surface réglée étant définie par une surface directrice S, qu'elle doit toucher le long d'une courbe C, et une autre directrice quelconque, ligne ou surface, l'auteur indique une méthode géométrique pour déterminer la génératrice passant par un point quelconque de C.

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (103-105).

L'auteur étudie une équation admettant $x = \infty$ comme point singulier d'ordre m, en la considérant comme limite d'une autre équation linéaire qui admet à distance finie les mêmes singularités que la première et, en outre $(m+1)$ points réguliers dont la fusion engendre le point irrégulier. La méthode des approximations successives permet de relier les intégrales canoniques de la seconde équation aux intégrales normales de la première et à la théorie des invariants de Poincaré.

Bloch (*L.*). — Sur les théories de la gravitation (111-113).

L'auteur montre qu'il suffit d'introduire un facteur dans l'expression de la loi de Weber pour mettre la théorie de la gravitation de Tisserand en accord avec le principe d'Hamilton et arriver aux mêmes résultats que la théorie d'Einstein en ce qui concerne l'anomalie du périhélie de Mercure. Ce facteur est précisément celui par lequel Einstein a dû modifier la loi de Gauss pour l'adapter à sa théorie.

Sparre (*M. de*). — Sur le coup de bélier dans une conduite forcée à parois d'épaisseur variable, dans le cas d'une fermeture progressive (144-148).

L'auteur étudie le cas d'une conduite de haute chute formée de trois tronçons d'épaisseur différente, la section intérieure restant toujours la même. Dans le cas d'une fermeture complète dans un temps très court, la variation de l'épaisseur des parois peut augmenter le coup de bélier de 66 pour 100.

Au contraire, si la fermeture se fait à vitesse constante, sa durée étant supérieure à celle d'une oscillation totale, on obtient pour le coup de bélier maximum la même valeur qu'en supposant la vitesse de propagation constante et égale à sa valeur moyenne. Il se produit toutefois un décalage, qui a d'ailleurs été constaté expérimentalement.

Buhl (*A.*). — Sur certaines sommes abéliennes d'intégrales doubles (149-150).

Soit F une surface algébrique d'ordre m et $\Psi(x, y, z)$ une fonction rationnelle. Un cône de sommet O détermine sur F m *cloisons* et l'on considère la somme abélienne $\sum \int\int \Psi(x, y, z)\, dx\, dy$ relative à ces cloisons; l'auteur montre, par un raisonnement géométrique, qu'on peut la mettre sous diverses formes et en particulier la ramener à $\int\int R(x, y)\, dx\, dy$, R étant rationnel. Cela est encore vrai si les variables cessent d'être réelles et les problèmes relatifs à la somme abélienne sont ainsi transformés: l'auteur en indique un des plus intéressants qui a été traité par M. E. Picard.

Lattès (*S.*). — Sur l'itération des substitutions rationnelles à deux variables (151-153).

L'auteur étudie en détail, pour le cas d'une substitution à deux variables, l'application de la méthode d'itération paramétrique qu'il a indiquée dans sa Note précédente (*voir* plus haut); les fonctions méromorphes fondamentales de M. E. Picard, invariantes par la substitution considérée, jouent ici le rôle des fonctions $\theta(u)$ de Poincaré pour le cas d'une seule variable.

Julia (*G.*). — Sur des problèmes concernant l'itération des fractions rationnelles (153-156).

Cette Note complète la solution du problème de l'itération exposée par l'auteur dans sa communication précédente (*voir* plus haut). En considérant l'une des régions R qui ont été définies, deux cas peuvent se présenter suivant qu'il existe, ou non, une fonction $\zeta(z)$ non constante dans R: l'auteur indique plusieurs propriétés fondamentales dans ces deux cas. En particulier, il existe une transformation $Z = f(z)$ qui applique R sur le cercle $|Z| < 1$; si l'on pose $Z_p = f(z_p)$, on trouve que $Z_p(Z)$ est une fonction rationnelle qui conserve l'intérieur du cercle $|Z| < 1$. On en déduit que : pour que $\zeta(z)$ ne soit pas constante dans R, il faut que $Z_p(Z)$ se réduise à $Ze^{i\theta}$, θ étant incommensurable à 2π.

Iversen (*F.*). — Sur les valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes et les singularités transcendantes de leurs inverses (156-159)

L'auteur rappelle la classification des points transcendants qu'il a donnée dans sa Thèse et fait la critique d'une classification différente établie par M. Rémoundos et des résultats que celui-ci en a déduits (*Comptes rendus*, t. 165, p. 331). Il montre en particulier, sur un exemple, que le deuxième théorème énoncé par M. Rémoundos est inexact.

Barbarin (P.). — Sur le dilemme de J. Bolyaï (202-204).

« *Aut axioma XI Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica* »; Bolyai l'a démontré par le moyen des horicycles de Lobatchewsky. L'auteur montre qu'on peut exécuter entièrement les constructions nécessaires pour la quadrature du cercle, dans la géométrie de Bolyaï-Lobatchewsky, en se servant seulement du triangle et du quadrilatère rectangles.

Fatou (P.). — Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières (204-206).

$R(z)$ étant une fonction rationnelle et α un point double de la substitution $[z|R(z)]$ tel que $|R'(\alpha)|<1$, l'auteur démontre le théorème suivant :

Si C est la frontière d'un domaine invariant contenant α, supposé simplement connexe, ce contour ne peut être un arc régulier de courbe analytique que si la substitution possède un cercle fondamental, dont C est la circonférence.

Denjoy (A.). — Sur les courbes de M. Jordan (207-209).

L'auteur se propose de donner une définition analytique de l'intérieur et de l'extérieur d'une courbe (C) continue, simple et fermée dans un plan, déduite de ses équations paramétriques : $x=f(t)$, $y=g(t)$.

Il y parvient par la considération de l'ensemble

$$x = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3, \qquad y = k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3,$$

x_i, y_i étant un point de C et k_1, k_2, k_3 des coefficients positifs, dont la somme est égale à 1. Les résultats, indiqués sans démonstration, semblent pouvoir se généraliser au cas d'un espace à plus de deux dimensions.

Pompéiu (D.). — Sur une définition des fonctions holomorphes (209-212).

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction de la variable complexe z définie dans une région R du plan; traçons autour d'un point z de R un contour simple fermé (C), limitant l'aire α, et posons

$$j = \int_C f(z)\,dz, \qquad \lambda = \frac{j}{\alpha}.$$

Si j tend vers une limite quand C tend vers le point z, nous appellerons la limite : *dérivée aréolaire* de $f(z)$ au point z. L'auteur démontre que : *pour que $f(z)$ soit holomorphe dans* R, *il faut et il suffit que sa dérivée aréolaire soit nulle en tout point de* R.

Montessus de Ballore (R. de). — Sur les quartiques gauches de première espèce (212-214).

On peut représenter paramétriquement toute quartique gauche de première espèce réelle, dépourvue de points singuliers, par des fonctions elliptiques;

l'auteur montre que, en choisissant convenablement le tétraèdre de référence, on peut n'introduire dans les formules que des coefficients réels. Le choix de ce tétraèdre dépend du nombre de cônes réels passant par la quartique, et l'auteur donne le moyen de passer effectivement des équations cartésiennes de la courbe à ces équations paramétriques.

Lalesco (*T.*). — Les classes de noyaux symétrisables (252-253).

L'auteur montre que les noyaux symétrisables peuvent se ranger en trois classes; il étudie quelques propriétés générales, relatives aux noyaux qu'on en déduit par itération et aux facteurs composants d'un même côté. Il définit *le genre* d'un noyau symétrisable et démontre que : *Tout noyau symétrisable de genre fini est symétrisable des deux côtés.*

Buhl (*A.*). — Sur la représentation, par des volumes, de certaines sommes abéliennes d'intégrales doubles (254-255).

Dans sa dernière Communication (*voir* plus haut) l'auteur a étudié la somme abélienne $\sum\int\int\Psi(x, y, z)\,dx\,dy$, relative aux cloisons découpées sur une surface algébrique F par un cône de sommet O; il en a donné une expression sous forme d'intégrale double qui peut garder la même valeur quand on change Ψ et F. On peut interpréter géométriquement cette dernière intégrale, au moyen d'un volume, et rendre concrètes la représentation et la discussion des sommes abéliennes.

Gau (*P.-E.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (276-278).

L'intégration d'une équation du second ordre (à deux variables indépendantes), par la méthode de Darboux, exige la connaissance de *deux* invariants d'un même système de caractéristiques; l'auteur montre que si l'on a *un* invariant, on peut en déduire, par une dérivation suivie d'opérations algébriques, un deuxième invariant et par suite intégrer l'équation.

Mladen T. Beritch. — Extension du théorème de Rolle au cas de plusieurs variables (279-281).

Soient deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$, continues à l'intérieur d'un contour C ainsi que leurs dérivées du premier ordre; l'auteur démontre que :

1° Si f et φ s'annulent aux deux points A et B du domaine, leur déterminant fonctionnel s'annulera le long d'un nombre impair de lignes L qui séparent A et B;

2° Dans une région R, à l'intérieur de C, limitée, soit par des lignes L, soit par des lignes L et C, il y aura au plus un point où s'annulent à la fois f et φ.

Ce théorème se généralise au cas de n fonctions de n variables.

Jekhowsky (*B.*). — Généralisation d'un théorème de Cauchy relatif aux développements en série (342-344).

Soit une fonction définie S(v), admettant la période 2Π, si l'on pose

$$z = e^{ix} \quad \text{et} \quad x = v - \Sigma\varepsilon_p \sin pv \quad (p = 1, \ldots, n)$$

cette fonction peut se mettre sous la forme $\Sigma P_k z^k$ (étendue de $-\infty$ à $+\infty$): ces séries sont utilisées en mécanique céleste. L'auteur généralise dans cette Note un théorème de Cauchy sur le calcul des coefficients P_k.

Montessus de Ballore (*R. de*). — Sur les quartiques gauches de première espèce (345-346).

Cette Note complète la précédente du même auteur (*voir* plus haut): il y étudie le cas où trois aux moins des cônes passant par la courbe se réduisent à des cylindres: les formules obtenues montrent que ce cas est essentiellement différent des autres.

Vessiot (*E.*). — Sur la propagation des ondes et sur la théorie de la relativité générale (349-351).

Soit φ la forme différentielle quadratique à quatre variables par laquelle Einstein définit le champ de gravitation; l'auteur montre que, dans cette physique : la propagation de la lumière se fait par ondes à surfaces ellipsoïdes, suivant le principe d'Huyghens, que les rayons satisfont au principe du temps minimum de Fermat, et enfin qu'on obtient l'équation des familles d'ondes en égalant à zéro le paramètre différentiel Δ_1 de Beltrami pour la forme φ.

Il en déduit qu'il y a identité dans la loi de propagation des ondes lumineuses et des ondes de gravitation, ce qu'Einstein n'avait démontré qu'en première approximation; on peut y ajouter aussi les ondes électromagnétiques.

Guichard (*C.*). — Sur une classe particulière de courbes plusieurs fois isotropes (369-372).

Appelons $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les paramètres directeurs, fonctions d'une variable u, de la tangente à une courbe C, dans un espace d'ordre n; on dira que C est p fois isotrope, ou courbe I^p, si l'on a

$$\sum x_i^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i \left(\frac{d^k x_i}{du^k}\right) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p-1).$$

Si en ajoutant un paramètre x_{n+1} aux précédents, la courbe de l'espace d'ordre $(n+1)$ qui admet ces paramètres est une I^p, on dit que la courbe primitive est une courbe $2I^p$; on définit de même les courbes $3I^p$, etc. L'auteur démontre alors que : Dans un espace d'ordre $n = 2p + 2$, toute I^p est orthogonale à une $2I^{p+1}$ et inversement. Il en déduit la solution du problème suivant :

Trouver dans un espace d'ordre $n = 2p + 2$, une courbe dont les paramètres directeurs des tangentes satisfont aux relations

$$\sum x_i^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{d^k x_i}{du^k}\right) = 0, \quad \sum a_i x_i^2 = 0, \quad \sum a_i \left(\frac{d^k x_i}{du^k}\right) = 0.$$

Ritt (J.-F.). — Sur l'itération des fonctions rationnelles (380-381).

L'auteur énonce quelques propriétés des fonctions $\theta(u)$ de Poincaré, suivant la forme de $R(z)$ (se référer pour les notations aux deux Notes ci-dessus de M. Lattès); il complète ainsi les résultats de M. Fatou au sujet de l'ensemble des antécédents d'un point, et il étudie particulièrement le cas où $R(z)$ est un polynome. En appelant $R_n(z)$ l'itéré $n^{\text{ième}}$ de $R(z)$, les points x tels que

$$R_n(x) = R_n(c)$$

sont dits *associés* à c; l'auteur étudie les propriétés de l'ensemble des associés d'un point.

Valiron. — Démonstration de l'existence, pour les fonctions entières, de chemins de détermination infinie (382-384).

L'auteur démontre l'existence de chemins sur lesquels le module de la fonction est toujours croissant et tend vers l'infini; il en déduit l'existence de chemins pour lesquels $\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|$ tend vers l'infini, quel que soit n, ainsi que de chemins sur lesquels $z^n[f(z) - a]$ tend vers zéro, a étant une valeur d'exception de $f(z)$ au sens de M. Picard.

Lalesco (T.). — Sur un point de la théorie des noyaux symétrisables (410-411).

L'auteur montre, par un exemple particulier, qu'il existe des noyaux symétrisables par un noyau fermé et qui ont un pôle double.

Brillouin (M.). — Milieux biaxes. Recherche des sources. Position du problème (412-416).

L'auteur montre d'abord que dans un milieu électriquement anisotrope, mais magnétiquement isotrope, les seules sources élémentaires possibles sont des *doublets*. Il étudie le champ de ces sources, dont la fonction génératrice $\varphi(x, y, z, t)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, et à certaines conditions aux limites; guidé par l'analogie avec les milieux uniaxes, l'auteur est conduit à une solution explicite de forme particulière et il indique les conditions auxquelles doivent satisfaire les arbitraires qui y figurent.

Mladen T. Beritch. — Sur la convergence et la divergence des séries à termes réels et positifs (451-453).

Essai d'interprétation, par une voie cinématique, de séries divergentes ou ayant plusieurs sommes distinctes.

Buhl (A.). — Sur l'intervention de la géométrie des masses dans certains théorèmes concernant les surfaces algébriques (454-456).

En étendant sur une surface quelconque une double couche de densité $\pm\tau_1(x, y, z)$, et en prenant le moment d'inertie de cette double couche par rapport à l'origine des coordonnées, on obtient des intégrales doubles abéliennes dont les propriétés peuvent ainsi s'interpréter géométriquement. En choisissant convenablement τ_1, l'auteur obtient des propositions qui généralisent des résultats dus à M. G. Humbert.

Lattès (S.). — Sur l'itération des fractions rationnelles (486-488).

L'auteur développe quelques points relatifs aux fonctions $\theta(u)$ de Poincaré, dont il a montré l'importance dans la théorie de l'itération (*voir* plus haut les Notes du même auteur): il y a au plus deux valeurs que les conséquentes d'une fonction rationnelle donnée ne peuvent pas prendre, en un point de la frontière du domaine d'un point d'attraction : ce sont justement les valeurs exceptionnelles de $\theta(u)$, et l'auteur en étudie les cas d'existence. Les fonctions de Poincaré permettent de résoudre le problème de *l'itération analytique*, qui revient au fond à trouver un groupe continu à un paramètre contenant la transformation identique ainsi qu'une transformation donnée.

Pulligny (de). — Sur quelques valeurs de la quadrature approchée du cercle (489-492).

En considérant le carré construit sur une corde d'un cercle, qui tourne autour d'un point S situé au milieu d'un rayon, on retrouve les diverses valeurs approchées connues de la quadrature du cercle, ainsi que quelques autres nouvelles, d'une réalisation graphique facile.

Appell (P.). — Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu (513-516).

Soit S un système de points mobiles par rapport à certains repères: on sait déterminer un trièdre T, mobile par rapport aux mêmes repères, tel que dans le mouvement de S par rapport à T, les quantités de mouvement des points de S forment un système de vecteurs glissants équivalent à zéro. L'auteur propose de dire dans ce cas que T est *immobile* par rapport au système de points S. Il montre l'intérêt que présente cette conception en Hydrodynamique et en Mécanique céleste.

Jourdain (*Philip-E.-B.*). — Démonstration du théorème d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné (520-523).

C'est une démonstration directe du théorème de Cantor, basée sur la notion de *chaîne d'ensembles*. Une chaîne est une partie bien ordonnée d'un ensemble M satisfaisant à certaines conditions définies par l'auteur; elle peut être elle-même facilement ordonnée: la démonstration consiste à prouver qu'il existe une chaîne qui épuise M. Cette démonstration étant indépendante de l'axiome de M. Zermelo, il s'ensuit qu'on peut démontrer celui-ci.

Humbert (*G.*). — Sur les représentations d'un entier par certaines formes quadratiques indéfinies (581-587).

Soit une forme d'Hermite, indéfinie, proprement primitive :

$$axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0$$

et D son déterminant (positif); dans chaque classe de formes de déterminant D, choisissons un représentant (a, b, b_0, c) tel que $a > 0$, et désignons par $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f''(x, y)$, etc. les formes ainsi choisies. Un nombre m, positif et impair, est représentable d'une infinité de manières par $f^{(h)}(x, y)$, mais il n'y en a qu'une pour laquelle le point (x, y) est à l'intérieur du domaine fondamental $\mathfrak{D}_h$, pour le groupe de M. Picard relatif à $f^{(h)}(x, y)$. En ne considérant que cette représentation particulière, on peut étendre à ces formes le théorème de M. Fatou pour les formes définies, et démontrer que : le nombre de représentations d'un nombre m, positif, premier à 2D, par les formes f, f', f'', ... est égal à deux fois la somme des diviseurs de m.

L'auteur termine par quelques exemples.

Julia (*G.*). — Sur les substitutions rationnelles (599-601).

L'auteur étudie la connexion des domaines restreints de convergence d'une fraction rationnelle, vers un point d'attraction; puis, dans le cas où il existe deux de ces points au moins, la nature géométrique des continus frontières des domaines de convergence; il précise, à propos d'exemples particuliers, la proposition, démontrée par M. Fatou, que ce continu ne peut être formé d'un seul arc analytique.

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations linéaires (602-605).

Dans une Note précédente (*voir* plus haut), l'auteur a exposé une méthode qui permet d'étudier une équation différentielle, linéaire, du second ordre, à points irréguliers, en la considérant comme limite d'une équation à points réguliers; il montre ici comment cette méthode permet de trouver des lignes de zéros pour les intégrales. Il étudie ensuite les équations à points irréguliers de seconde espèce, en procédant par continuité à partir des équations de première espèce.

Valiron. — Sur le maximum du module des fonctions entières (605-608).

Soient une fonction entière $\Sigma c_n z^n$; $M(r)$ le maximum de son module pour $|z| = r$, et $m(r)$ le plus grand des modules $|c_n| r^n$. M. Wiman a démontré que l'inégalité

$$M(r) < m(r)[\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0, \lim \varepsilon = 0 \text{ pour } r = \infty)$$

a lieu pour une infinité de valeurs de r: l'auteur démontre ici, en employant une représentation géométrique due à M. Hadamard, qu'elle est vraie *presque partout;* il indique quelques résultats qui s'y rattachent.

Pulligny (de). — Quelques remarques nouvelles sur la quadrature approchée du cercle (608-611).

Addition à la Note précédente du même auteur (*voir* plus haut).

Boussinesq (J.). — Équations aux dérivées partielles, pour les états ébouleux voisins de la solution Rankine-Lévy, dans le cas d'un terre-plein à surface libre ondulée, mais sans pente moyenne (625-630).

L'auteur montre que la détermination des composantes de la pression se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre : en étudiant l'ordre de grandeur des termes qui y figurent, on peut, *en première approximation*, réduire cette équation à la forme de d'Alembert,

$$r - a^2 t = 0,$$

qui s'intègre facilement et d'où l'on déduit les éléments de la solution du problème. On a ainsi une approximation *par défaut* : en particulier, elle donne pour la poussée une valeur trop faible et il y aurait lieu de chercher si une deuxième approximation ne donnerait pas des résultats plus satisfaisants.

Lecornu (L.). — Sur le signe des rotations (630-632).

L'auteur expose les raisons pour lesquelles il ne croit pas opportun d'apporter des modifications aux sens positifs différents, pour les rotations, adoptés par les astronomes et les mécaniciens.

Boussinesq (J.). — Calcul de deuxième approximation de la poussée limite exercée sur un mur vertical par un terre-plein à surface libre horizontale (657-663).

L'erreur la plus importante commise dans la première approximation (*voir* plus haut) provient surtout de la partie du terre-plein constituant le coin con-

tigu au mur; c'est pourquoi l'auteur se borne à ce coin de sable pour la deuxième approximation.

Celle-ci se ramène à l'étude de l'équation $r - a^2 t = \frac{s^2}{x \sin \varphi}$, que l'auteur intègre elle-même d'une manière approchée, en tenant compte de ce que le second membre est du deuxième ordre de grandeur par rapport au premier; il est ramené ainsi à une équation de la forme $r - a^2 t = F(x, y)$. Il termine par quelques indications sur les résultats numériques de ces calculs, applicables dans la pratique.

Haag (*J.*). — Sur une application de la loi de Gauss à la syphilis (673-675).

Une statistique digne de foi a montré à l'auteur que la durée d'incubation de la syphilis satisfait à la loi de Gauss d'une manière très remarquable. L'application des méthodes du calcul des probabilités lui permet de calculer la durée normale et de résoudre divers problèmes qui se posent à ce sujet.

Roy (*L.*). — Sur le problème de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques (675-678).

La solution classique de ce problème, dans le cas d'une surface séparative plane de deux milieux homogènes et isotropes, admet comme un fait expérimental l'existence des ondes réfléchie et réfractée de toute onde incidente donnée. L'auteur montre que ces ondes représentent justement la solution simple la plus générale, par ondes planes périodiques, dont le probleme soit susceptible; il y a toutefois une réserve à faire sur les amplitudes, qui ne sont pas entièrement déterminées par les équations du problème.

Pérès (*J.*). — Sur certains développements en série (723-726).

Soient $f_0(t)$, $f_1(t)$, etc., une infinité de fonctions définies et continues dans un intervalle, et supposons qu'on connaisse une fonction $\Phi(\tau, t)$ satisfaisant aux conditions

$${}_p(t) = \frac{t^p}{p!} + \int_0^t \frac{\tau^p}{p!} \Phi(\tau, t)\, d\tau.$$

En considérant les équations intégrales associées

$$\varphi(t) = \lambda(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\Phi(\tau, t)\, d\tau, \qquad \lambda(t) = \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\Psi(\tau, t)\, d\tau,$$

où Ψ est le noyau résolvant de Φ, on voit que si λ est développable en série de puissances, φ sera développable en séries de fonctions f_p; si λ se développe en série de polynomes en t, on aura pour φ un développement en série de polynomes en f_p. L'auteur donne quelques exemples, en particulier pour les fonctions de Bessel.

Latesco (*T.*). — Sur l'application des équations intégrales à la théorie des équations différentielles linéaires (727-728).

L'auteur indique les propriétés remarquables, au point de vue de la dérivation et de la multiplication, des fonctions définies par la relation de récurrence

$$G_p(x, y) = \int_a^b G_1(x, s)\, G_{p-1}(s, y)\, ds$$

avec $2G_1(x, y) = 1$, si $x > y$ et -1 si $x < y$. Ces fonctions permettent de ramener à une équation intégrale tout problème relatif à une équation différentielle linéaire dont les données initiales sont bilocales, en prenant comme fonction inconnue la dérivée d'ordre la plus élevée.

Mladen T. Beritch. — Un procédé intuitif pour la recherche des maxima et minima ordinaires (729-731).

L'auteur remarque que, si a, b, c sont trois zéros consécutifs de la dérivée de $f(x)$, dans un intervalle sans discontinuité, b sera un maximum si

$$f(a) < f(b) > f(c).$$

Il en tire quelques conséquences pour le cas des fonctions de deux variables, liées ou indépendantes.

Andrade (*J.*). — Sur quelques transformations ponctuelles et sur le cercle de similitude de deux cycles (731-733).

L'auteur montre que certaines transformations ponctuelles peuvent être représentées par une correspondance entre deux solides : cela permet alors d'envisager les propriétés de la transformation sous forme géométrique. Il étudie, en particulier, la transformation représentée par une similitude directe entre deux circonférences sur lesquelles seraient marquées des divisions angulaires égales (cycles).

Bricard (*R.*). — Sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe (734-735).

Un tel mouvement étant assimilé à celui de deux sphères égales concentriques, l'une S_0 fixe, l'autre S mobile, il y a à chaque instant ∞^2 mouvements possibles, dont les axes instantanés sont dans un plan diamétral. L'auteur montre que les pôles de ce plan, sur S et S_0, établissent entre deux régions de ces sphères une correspondance qui conserve les aires. Il étudie le cas où les sphères se réduisent à des plans.

Humbert (*G.*). — Sur les formes quadratiques indéfinies d'Hermite (753-758).

En transformant une formule démontrée dans sa Note précédente, analysée ci-dessus, et dont nous conservons les notations, l'auteur démontre la suivante :

$$\Sigma A = \pi D \prod_q \left[1 + \left(-\frac{1}{q} \right) \frac{1}{q} \right],$$

où les A représentent les aires des domaines $\mathfrak{D}_h$, transformés dans le demi-espace non-euclidien de Poincaré; le produit est étendu aux facteurs premiers q de D, réels, impairs, distincts et supérieurs à 1.

Boussinesq (*J.*). — Profil de rupture d'un terre-plein sablonneux horizontal, à couches plus rugueuses dans le voisinage de son mur de soutènement vertical qui commence à se renverser (759-764).

L'auteur établit l'équation différentielle du profil de rupture au moment de l'éboulement. Cette équation est homogène et on la ramène à une intégrale abélienne; mais en négligeant les coefficients petits, on parvient finalement à une intégrale rationnelle simple, ce qui permet de calculer les constantes numériques intéressantes dans la pratique.

Julia (*G.*). — Valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère, en un point de discontinuité des données (770-773).

Moyennant certaines hypothèses très générales, l'auteur ramène l'étude de l'intégrale de Poisson à celle d'un potentiel de simple couche étalée sur la sphère et en déduit la valeur limite en un point O de discontinuité. On a un résultat particulièrement remarquable lorsque O appartient à une ligne de discontinuités admettant une tangente en ce point.

Vallée Poussin (*C. de la*). — Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné (799-802).

L'auteur se base sur une propriété des sommes de Fejér pour démontrer que : la meilleure approximation d'une fonction $f(x)$, de période 2π, par une expression trigonométrique d'ordre n, n'est pas inférieure au quotient par $\frac{2n+p}{p}$ de l'approximation obtenue quand on prend, comme valeur approchée de $f(x)$, la moyenne arithmétique de p sommes de Fourier consécutives à partir de S_n ; en particulier (si $p = n$) elle n'est pas inférieure au quart de l'approximation fournie par la moyenne des n sommes de Fourier consécutives à partir de S_n. Il en tire des conséquences lorsque $f(x)$ est développable en série de Fourier et retrouve un résultat de M. S. Bernstein dans le cas où $f(x) = |x|$.

Pérès (J.). — Quelques remarques sur certains développements en série (806-808).

L'auteur établit les conditions qui caractérisent l'existence de la fonction $\Phi(\tau, t)$ dont il a été question dans sa Note précédente (*voir* plus haut). Il indique également la valeur de Φ qui convient aux développements en série de fonctions de Bessel.

Buhl (A.). — Sur les séries de polynomes tayloriens franchissant les domaines W (808-811).

La division $\frac{1}{z-a}$, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, permet d'écrire toute fraction rationnelle sous la forme

$$F(z) = \sum_k \frac{1}{z-a_k} = s_n(z) + \sum_k \frac{A_k z^n}{a_k^n(z-a_k)};$$

en choisissant convenablement une fonction entière $f(\xi) = \Sigma v_n \xi^n$, l'auteur montre qu'on en déduit

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{v_n \xi^n s_n(z)}{f(\xi)}.$$

On peut passer de là au cas où les a_k sont en nombre infini, formant un ensemble dénombrable, partout dense, sur un contour C de forme quelconque entourant l'origine; le développement précédent, établi sans considération de C, franchit évidemment ce contour.

Vallée Poussin (C. de la). — Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module bornés (843-846).

Soit une expression de la forme

$$S(x) = \Sigma(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

l'auteur démontre que si le module de S ne surpasse pas L, celui de sa dérivée ne surpasse pas nL.

Humbert (G.). — Sur le nombre des classes de formes à indéterminées conjuguées, indéfinies, de déterminant donné (865-870).

L'auteur démontre que pour un déterminant D positif donné, impair ou impairement pair, les formes d'Hermite indéfinies, proprement primitives, du corps $\sqrt{-1}$, appartiennent toutes à une seule et même classe. Si $D \equiv 1 \pmod 4$, les formes d'Hermite indéfinies, improprement primitives, du champ $\sqrt{-1}$ appartiennent à deux classes distinctes, qui se transforment l'une dans l'autre par des substitutions de déterminant $-i$. Si $D \equiv 0 \pmod 4$, le nombre de classes est $\geqq 2$. On a des résultats analogues pour les formes du corps $i\sqrt{d}$.

Giraud (*G.*). — Sur une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du second ordre, se rattachant à la théorie des fonctions hyperfuchsiennes (893-895).

L'auteur a étudié précédemment (*voir* plus haut) certains groupes hyperfuchsiens dont les fonctions correspondantes s'expriment rationnellement au moyen de trois d'entre elles, liées elles-mêmes par une relation algébrique : cette étude est liée à celle de l'équation

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2=e^u$$

qui présente beaucoup d'analogie avec l'équation $\Delta u = e^u$.

Buhl (*A.*). — Sur les volumes engendrés par la rotation d'un contour sphérique (896-897).

Le volume engendré par un contour fermé, tracé sur une sphère, en tournant autour d'un axe quelconque de l'espace, est donné par une formule très simple, susceptible de diverses interprétations géométriques.

Hamy (*M.*). — Sur la diffraction des images solaires (878-881).

Le pouvoir optique d'un objectif augmente, sous certaines conditions, quand on dispose un écran sur sa partie centrale ; l'auteur étudie l'influence d'un écran masquant la partie centrale de la fente d'un objectif diaphragmé, et montre par le calcul que le bord optique est moins tranché dans ce cas que lorsque la fente est utilisée dans toute sa longueur.

Humbert (*G.*). — Sur les représentations d'un entier par les formes quadratiques ternaires indéfinies (925-930).

Une forme ternaire $\mathfrak{F}(x, y, z)$ peut se reproduire elle-même par les transformations d'un certain groupe : on conviendra ici, comme l'auteur l'a déjà fait pour les formes d'Hermite, de ne considérer, parmi les solutions de l'équation $\mathfrak{F}(x, y, z) = N$, que celles pour lesquelles le point (x, y, z) est dans le domaine fondamental $\mathfrak{D}$ de Poincaré pour le groupe considéré. Avec cette restriction, on peut étendre aux formes indéfinies les résultats connus pour les formes ternaires positives, et en particulier ceux de Smith. L'auteur donne la valeur de l'aire non euclidienne du domaine $\mathfrak{D}$.

Boussinesq (*J.*). — Intégration graphique pour le problème de l'état ébouleux, dans le cas d'un terre-plein à surface libre ondulée, indéfini à l'arrière et maintenu à l'avant par un mur courbe (930-935).

L'auteur donne des formules qui permettent, une fois dessinés le profil de la surface libre (supposée à ondulations faibles) ainsi que celui du mur, de cons-

truire géométriquement les pressions d'équilibre-limite existant en tous les points du massif; sur le mur, on obtient un résultat remarquable : la composante normale de la poussée par unité d'aire est proportionnelle à la distance du point considéré à la surface libre, comptée parallèlement à une certaine direction fixe qui se définit graphiquement.

Pérès (J.). — Sur certaines transformations fonctionnelles (931-941).

Toutes les fonctions permutables avec $F(x, y)$ sont données par la formule de M. Volterra

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\Phi(\xi; x-y)\, d\xi$$

la fonction Φ dépendant de F. L'auteur donne le moyen d'obtenir toutes les fonctions Φ génératrices de tous les corps de fonctions permutables; elles dépendent d'une fonction arbitraire $f(x, y)$.

Pulligny (de). — Sur la quadrature approchée du cercle (941-943).

L'auteur indique une construction qui donne π avec une erreur relative inférieure à 0,00005.

Brillouin (M.). — Milieux biaxes. Recherche des sources. Les amplitudes (946-949).

Dans sa Note précédente (*voir* plus haut) l'auteur a donné les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les amplitudes. Il montre ici que les deux équations principales se ramènent, par une transformation très simple, chacune à une équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$; la considération des intégrales homogènes de celles-ci, que l'auteur obtient sous forme générale, permet de trouver les amplitudes satisfaisant à toutes les conditions.

Boussinesq (J.). — Uniformité de l'écoulement dans les sabliers : le débit y paraît indépendant de la hauteur de charge (973-977).

La solution analytique du problème paraît excéder les moyens actuels d'intégration des équations aux dérivées partielles; l'auteur se borne à des considérations sur le mécanisme probable de l'écoulement et sur l'état de la masse pendant cet écoulement. Un exemple met en évidence le contraste entre l'écoulement du sable par un orifice et celui d'un liquide.

Villat (H.). — Sur certaines équations de Fredholm singulières de première espèce (981-984).

L'auteur étudie deux équations de Fredholm réciproques, chacune donnant

la solution de l'autre, dont les noyaux sont construits au moyen des fonctions ζ de la théorie des fonctions elliptiques, et qui sont analogues par leurs propriétés à un système plus simple étudié par Poincaré, M. Fatou et l'auteur lui-même. Ces équations ont été rencontrées dans un problème de Physique mathématique.

Jourdain (*Philip E.-B.*). — Démonstration du théorème d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné (984-986).

Cette Note est une addition à la précédente du même auteur (*voir* plus haut), ayant pour but de la compléter sur quelques points de détail.

Cahen (*E.*). — Sur les séries de Dirichlet (987-989).

L'auteur démontre pour les séries de Dirichlet généralisées,

$$\sum \frac{a_n}{\mu_n^s} \qquad (0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots \mu_\infty = \infty)$$

quelques-unes des propriétés importantes que l'on connait pour les séries $\sum \frac{a_n}{n^s}$.

Boussinesq (*J.*). — Équations générales régissant les lents écoulements des matières semi-fluides, soit plastiques, soit pulvérulentes (1016-1021).

En appelant N et T les pressions intérieures, le problème comporte neuf inconnues, qui sont les projections de N et T et celles de la vitesse; celles-ci sont d'ailleurs petites et les accélérations négligeables. On peut écrire facilement les trois équations d'équilibre ordinaires, l'équation de continuité et enfin l'équation caractéristique du semi-fluide. L'auteur montre comment on peut former les quatre équations qui manquent en faisant intervenir l'élasticité des particules : on aboutit ainsi à des relations très simples qui sont précisément celles qu'avait posées Barré de Saint-Venant. L'auteur termine par l'étude des conditions aux limites du problème.

E. Gau.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tomo XVIII, 1904 (¹)
(1re Partie : *Memorie e Comunicazioni*).

Lo Monaco-Aprile (*L.*). — Sulla superficie luogo dei contatti di 1° ordine delle superficie di un fascio con quelle di una rete, generali, e sue applicazioni. (Sur la surface lieu des contacts

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLII₂, p. 38.

du premier ordre des surfaces d'un faisceau avec celles d'un réseau, généralités, et ses applications.) (1-15.)

L'auteur construit la surface en question, S, et applique le résultat obtenu au cas où le réseau et le faisceau sont du même ordre et appartiennent à un même système linéaire ∞^3 : S représente alors la jacobienne du système.

Dans une autre Note du même Recueil [1], il étudie de même le contact des surfaces et des courbes gauches, en introduisant une notion analogue : celle de la courbe gauche, lieu des contacts des surfaces de deux faisceaux.

Insolera (*F.*). — Figure ellittiche di equilibrio di un velo piano liquido ruotante. (Figures elliptiques d'équilibre d'un voile plan liquide tournant.) (16-44.)

L'ellipsoïde, figure d'équilibre relatif d'une masse fluide tournante dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton, admet deux cas-limites : le cylindre et le disque plan; c'est ce dernier cas que l'auteur étudie. Il suppose que la densité est une fonction linéaire du paramètre des ellipses homothétiques qui sillonnent la masse, et qu'elle s'annule au contour. Il trouve ainsi qu'il existe une valeur limite de la vitesse de rotation, au delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible; en deçà, il peut y avoir une position d'équilibre au moins, trois au plus. Si la vitesse est très faible, il y a des figures qui se rapprochent de celle d'une aiguille; enfin la forme circulaire est toujours possible, quelle que soit la vitesse de rotation. Le travail se termine par un Tableau de résultats numériques.

Poincaré (*H.*). — Cinquième complément à l'*Analysis situs*. (45-110.)

Dans le second complément à l'*Analysis situs*, H. Poincaré avait établi que, pour caractériser une variété au point de vue de la géométrie de situation, il faut connaître, non seulement ses nombres de Betti, mais encore ses coefficients de torsion. Pour une variété simplement connexe, nombres de Betti et coefficients de torsion sont égaux à 1. Or, on pouvait se demander si, réciproquement, toute variété remplissant ces conditions est simplement connexe; en fait, il n'en est rien, et le Mémoire de H. Poincaré a précisément pour objet de faire connaître une variété à trois dimensions pour laquelle cette réciproque est en défaut.

Indiquons d'abord le procédé employé par l'auteur pour décrire une variété V à trois dimensions. Il envisage, dans l'espace S_4 auquel elle appartient, une famille de variétés à trois dimensions, dépendant d'un paramètre t, variant, par exemple, entre 0 et 1 ; ces variétés déterminent sur la première une section $W(t)$ à deux dimensions. Dans l'exemple qu'il a en vue, $W(t)$ se compose d'une seule surface, qui est toujours fermée et bilatère, se réduit à un point pour $t=0$ et $t=1$, et dont l'ordre de connexion croît de 1 à $2p+1$ quand t varie

(1) *Voir* ci-après.

de o à $\frac{1}{2}$, et décroît de $2p+1$ à 1 pour $\frac{1}{2} < t < 1$; d'ailleurs dans cet exemple, p est égal à 2.

Or, pour le problème actuel, sur lequel on reviendra tout à l'heure, une question préliminaire se pose : il s'agit de former toutes les homologies possibles de V; pour cela l'auteur forme toutes les équivalences possibles de V, et il montre, à cet effet, que celles-ci se composent des équivalences relatives aux deux variétés *ouvertes* V' et V'' qu'on déduit de V en faisant varier successivement t de o à $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$ à o. Et, pour étudier ces deux variétés, l'auteur se trouve amené à édifier toute une théorie préliminaire qui repose essentiellement sur *la représentation des surfaces* $W(t)$ *au moyen de polygones fuchsiens de la première ou de la troisième famille*, et dont les côtés sont les images de cycles convenablement choisis de $W(t)$; d'ailleurs un cycle quelconque aura toujours pour image une courbe fermée, ou aboutissant à deux points congruents du contour du polygone. Partant de là, l'auteur parvient à reconnaître dans quels cas un (deux) cycle d'une surface est (sont) équivalent à un (deux) cycle ne se coupant pas lui-même (mutuellement) : ce qui lui permet d'assigner les conditions que doivent réaliser les cycles d'une surface $W(t)$ pour que $W(t)$ engendre l'une des variétés V' ou V''.

Revenons maintenant au problème lui-même; H. Poincaré suppose que la surface $W\left(\frac{1}{2}\right)$, commune à V' et V'', peut être représentée par un polygone de la troisième famille limitée par quatre cercles, dont trois sont intérieurs au dernier; ces cercles sont les images de cycles C_1, C_3 correspondant à V'; quant aux cycles C_2, C_4 de V'', l'auteur choisit leurs images sur le polygone de manière à vérifier les conditions dont il était question tout à l'heure. Il est bien remarquable que ce choix puisse être fait de telle sorte que sur V il n'y ait que deux cycles distincts C_2, C_4 entre lesquels il n'existe que deux équivalences

(1) $$4C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0 \quad \text{et} \quad -2C_4 - C_2 + C_4 - C_2 \equiv 0.$$

Transformées en homologies, elles donnent

$$3C_2 + 2C_4 \sim 0 \quad \text{et} \quad -2C_2 - C_4 \sim 0;$$

leur déterminant étant égal à -1, les nombres de Betti et les coefficients de torsion sont égaux à 1 : pourtant, si l'on adjoint à (1) l'équivalence

$$-C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0,$$

on en déduira $5C_2 \equiv 0$, $3C_4 \equiv 0$; *ce sont là les relations de structure du groupe icosaédrique;* par suite le groupe fondamental de V ne peut se réduire à la substitution identique, et V n'est pas simplement connexe.

Paternò (*F. P.*). — Un teorema sulle projezioni ortogonali di due segmenti rettangolari e la sua applicazione in geometria descrittiva. (Un théorème sur les projections orthogonales de deux segments rectangulaires, et son application en géométrie descriptive.) (111-115.)

Application d'un théorème de géométrie élémentaire au tracé des épures des polyèdres réguliers.

Vitali (*G.*). — Sui gruppi di punti. (Sur les ensembles ponctuels.) (116-126.)

Après avoir rappelé la définition de l'étendue d'un ensemble d'après C. Jordan, et de la mesure d'après E. Borel, l'auteur introduit dans le même ordre d'idées une définition nouvelle. Sa théorie repose sur la notion d'*étendue minimum* (minima estensione) qu'il avait déjà introduite, et qui est identique à celle de mesure extérieure: elle utilise en outre la notion nouvelle d'*entrelacement* (allaciamento) de deux ensembles, ce qui lui permet d'établir que l'étendue minimum de la somme de deux ensembles est égale à la somme des étendues minima diminuée de l'entrelacement. Cela étant, un ensemble E appartenant à l'intervalle (0,1) sera mesurable pour G. Vitali, si E et son complémentaire ont un entrelacement nul. Une Note additionnelle affirme que les recherches de l'auteur (1903), sont indépendantes de celles de H. Lebesgue (1901).

Alagna (*R.*). — I gruppi abeliani, la cui base è formata di una o di due sostituzioni generatricie, e la totalità dei loro sottogruppi. (Les groupes abéliens dont la base est formée d'une ou de deux substitutions génératrices, et la totalité de leurs sous-groupes.) (127-163.)

L'auteur énumère tous les sous-groupes d'un groupe abélien, par une méthode directe, indépendante de celle des *caractères* des groupes. Il se limite d'ailleurs aux groupes dérivés d'une ou deux substitutions.

Lo Monaco-Aprile (*L.*). — Sopra alcuni problemi di contatto relativi a superficie e a curve gobbe algebriche. (Sur quelques problèmes de contact relatifs aux surfaces et aux courbes gauches algébriques.) (164-184.)

Voir, au début, la première Note de l'auteur.

Trafelli (*L.*). — Sopra l'inversione delle integrali definiti. (Sur l'inversion des intégrales définies.) (185-198.)

Extension des formules d'inversion de Sonine et de V. Volterra.

Caldarera (*G. M.*). — Le trasformazioni birazionali dello spazio inerenti ad una cubica sghemba. (Les transformations birationnelles de l'espace attachées à une cubique gauche.) (205-217.)

La Note se rapporte aux transformations crémoniennes de l'espace pour lesquelles la droite qui joint deux points correspondants s'appuie sur une cubique gauche. La discussion, qui se limite aux circonstances les plus générales, se subdivise en deux cas suivant que la transformation est involutive ou non.

Bagnera (*G.*). — Sopra il limite superiore del modulo di una funzione intera di ordine finito. (Sur la limite supérieure du module d'une fonction entière d'ordre fini.) (218-220.)

Extension d'une formule de majoration due à H. Poincaré.

Bortolotti (*E.*). — Contributo alla teoria dei prodotti infiniti e delle serie a termini positivi. (Contribution à la théorie des produits infinis et des séries à termes positifs.) (224-255.)

L'auteur étudie l'allure asymptotique de l'expression $\prod_{r=1}^{n}(1+a_n)$, les a étant réels; il compare, notamment, les deux symboles

$$\prod_{r=1}^{n}[1+a(x_0+r)] \quad \text{et} \quad e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda+n} a(x)\,dx}.$$

Severi (*F.*). — Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso. (Sur les problèmes déterminés résolubles avec la règle et le compas.) (Extrait d'une lettre à F. Enriques.) (256-259.)

L'auteur établit que tout problème résoluble au moyen de la règle et du compas peut être résolu au moyen de la règle et d'un arc de cercle, de centre donné, tracé sur l'épure, c'est-à-dire, en définitive, au moyen d'un seul instrument : la règle à bords parallèles.

Lebon (*E.*) — Sur le nombre des nombres premiers de 1 à N. (Présenté au Congrès des Sociétés savantes, le 6 avril 1904.) (260-268.)

Lebon (*E.*). — Sur la somme des nombres premiers de 1 à N. (Présenté au Congrès des Sociétés savantes, le 6 avril 1904.) (269-272.)

L'auteur fait connaître deux formules qui fournissent *exactement* le nombre et la somme des nombres premiers de 1 à N; ces formules font intervenir les restes de la division de N par les nombres premiers successifs de 1 à $\sqrt{N}$.

Pincherle (*S.*). — Risoluzione di una classe di equazioni funzionali. (Résolution d'une classe d'équations fonctionnelles.) (273-293.)

Dans ce travail, S. Pincherle expose une méthode qui permet de résoudre toute équation fonctionnelle du type $A(b) = a$, où a est une fonction donnée, b l'inconnue, et A un symbole opératoire distributif et permutable à la dérivation : ces équations comprennent donc les équations différentielles linéaires, les équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants. Bornons-nous au résultat suivant : Appliqué à x^n, le symbole A le transforme en un polynome d'Appell,

$$k_0 x^n + n k_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} k_2 x^{n-2} + \ldots + k_n;$$

si elle a un sens, l'expression

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k_n \frac{t^n}{n!} = \alpha(t)$$

sera la fonction caractéristique de l'opération ; et si l'on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad J\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, c_n}{t^n},$$

l'équation $A(\omega) = \varphi$ aura pour solution

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} e^{xt} J\varphi \frac{dt}{\alpha(t)},$$

le chemin l étant convenablement choisi et les symboles appartenant à des espaces fonctionnels pour lesquels les formules ont un sens.

Stuyvaert (*M.*). — Sur la courbe lieu des points de contact des surfaces de deux faisceaux. (294-300.)

Application de la théorie des matrices à la solution de divers problèmes de géométrie énumérative traités précédemment par C. Mineo.

Fubini (*G.*). — Sulle traiettorie di un problema dinamico. (Sur les trajectoires d'un problème de dynamique.) (301-310.)

L'auteur s'appuie sur des résultats de P. Painlevé et G. Kœnigs pour determiner tous les problèmes de dynamique, à *deux paramètres*, et tels qu'il existe un groupe transformant les trajectoires en elles-mêmes. Il présente, en outre, diverses remarques sur la résolution du problème général.

Orlando (*L.*). — Sulla deformazione del suolo elastico isotropo. (Sur la déformation du sol élastique isotrope.) (311-317.)

Méthode rapide pour traiter la déformation d'un solide homogène, isotrope, soustrait à l'action des forces de masse et limité par un milieu indéfini.

Dini (*U.*). — Sugli integrali multipli in generale, e su quelli che valgono per la rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali. (Sur les intégrales multiples en général, et sur celles qui servent à la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables réelles.) (318-359.)

Dans ce travail, qui constitue un complément à son Ouvrage sur les séries de Fourier, l'auteur étend aux intégrales multiples les formules de G. Darboux, O. Bonnet et P. du Bois-Reymond; et, passant aux coordonnées sphériques, il applique ses résultats aux fonctions représentables sur la sphère par les fonctions sphériques $P_n(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$.

Stéphanos (*C.*). — Sur une catégorie d'équations fonctionnelles. (Communication faite au IIIe Congrès international de Heidelberg.) (360-362.)

La Note se rapporte aux fonctions $F(x, y)$ représentables sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)\,\psi_i(y).$$

Pascal (*E.*). — Sul teorema di Bäcklund nel piano. (Sur le théorème de Bäcklund dans le plan.) (363-367.)

Démonstration dans le cas du plan du théorème de Bäcklund d'après lequel il est impossible de construire une transformation qui conserve les contacts d'ordre plus grand que 1, sans conserver aussi les contacts du premier ordre.

Tedone (*O.*). — Sull' equilibrio di una piastra elastica, isotropa, indefinita. (Sur l'équilibre d'une plaque élastique, isotrope, indéfinie.) (368-385).

L'auteur s'appuie sur une formule d'inversion pour les intégrales triples, qu'il déduit de formules dues à C. Neumann et Hankel, ainsi que sur la formule de sommation des fonctions de Bessel. Il traite ensuite le problème en supposant successivement que les données sont les déplacements, puis les efforts, et, chaque fois, par une double méthode.

René Garnier.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Série III, Tome XX. 1913 ([1]).

Loria (Gino). — G.-L. Lagrange nella vita e nelle opere [G.-L. Lagrange, sa vie et ses œuvres] (IX-LII).

Cette attachante étude de la pensée scientifique de Lagrange forme l'introduction des deux volumes des *Annali* (t. XX et XXI), dédiés à la mémoire de Lagrange, à l'occasion du centenaire de sa mort.

Landau (Edmond). — Ueber die zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate [Sur la décomposition des nombres en deux carrés] (1-28).

L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème suivant de Sierpinski : en désignant par $A(x)$ le nombre des solutions en u et v (entiers $\gtreqless 0$) de

$$u^2 + v^2 \leqq x,$$

le quotient

$$\left| \frac{A(x) - \pi x}{x^{\frac{1}{3}}} \right|$$

reste borné. Il utilise une méthode de Pfeiffer, qu'il a mise au point et utilisée dans d'autres recherches de théorie des nombres.

Le Mémoire débute par la démonstration d'un certain nombre de lemmes relatifs à la fonction

$$\varphi_m(u) = 1 + 2 \sum_{1}^{m} {}_{\nu} \cos 2\nu\pi u,$$

dont le rapport avec la question traitée sera rendu manifeste par la formule (qui constitue l'un de ces lemmes)

$$\lim_{m=\infty} \iint_k \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = A(x),$$

k étant le cercle $u^2 + v^2 \leqq x$ (x différent d'un entier). L'auteur en déduit pour m assez grand,

$$\left| A(x) - \pi x - 4 \sum_{1}^{m} {}_{a} \sum_{1}^{m} {}_{b} \iint_{k_x} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v\, du\, dv \right| < c x^{\frac{1}{3}},$$

d'où, en intégrant entre les limites x et $x_1 = x + x^{\frac{1}{3}}$, utilisant des limites

---

([1]) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIII, 1919, 2e Partie, p. 5.

supérieures convenables pour la somme double et remarquant que

$$x^{\frac{1}{3}} A(x) < \int_{x}^{x_1} A(\xi)\, d\xi < x^{\frac{1}{3}} A\left(x + x^{\frac{1}{3}}\right),$$

on déduit le résultat annoncé.

Abraham (*Max*). — Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica [Les équations de Lagrange dans la nouvelle mécanique] (29-35).

La « nouvelle mécanique » qui réduit à n'être plus que de premières approximations la plupart des principes fondamentaux classiques conserve, au contraire, sans modifications essentielles, le principe de Hamilton et les équations de Lagrange [1].

M. M. Abraham déduit ici, des équations de Lagrange, les équations indiquées par Einstein pour le mouvement d'un point, dans sa nouvelle théorie de la gravitation. L'auteur écrit les équations de Lagrange en prenant pour fonction de Lagrange une fonction $L(v, c)$; v étant la vitesse et c, vitesse de la lumière, étant une fonction de x, y, z, t, puisque, d'après l'hypothèse d'Einstein, liée ou potentiel gravifique. Il interprète les différents termes qui figurent dans ces équations, écrit l'équation de l'énergie et retrouve, pour

$$L = -\sqrt{c^2 - v^2},$$

les équations mêmes d'Einstein.

Appell (*Paul*). — Les équations du mouvement d'un fluide parfait déduites de la considération de l'énergie d'accélération (37-42).

L'auteur montre comment on peut déduire les équations de l'Hydrodynamique du principe essentiel qu'il a établi (*Comptes rendus*, t. 129, p. 317) et dont je rappelle ici l'énoncé :

Dans un système à liaisons quelconques, sans frottements, holonomes ou non, soumis à des forces X, Y, Z dépendant du temps, des positions et des vitesses, les composantes x'', y'', z'' des accélérations ont, à un instant quelconque, les valeurs qui rendent minimum la fonction

$$\sum \left[\frac{m}{2} (x''^2 + y''^2 + z''^2) - (X x'' + Y y'' + Z z'') \right].$$

Pascal (*Ernesto*). — Sopra una classe di equazioni differenziali di grado n e di ordine $n-1$ da considerarsi come estenzioni

---

[1] *Voir*, sur l'importance du principe de Hamilton, comme fondement de la nouvelle mécanique, l'intéressante Conférence de M. Levi-Cività : *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica* (Conferenza tenuta al Seminario mat. della R. Univ. di Roma, 1919).

delle equazioni di Riccati [Sur une classe d'équations différentielles de degré n et d'ordre $n-1$ à envisager comme extensions des équations de Riccati] (43-48).

Ce sont les équations différentielles en z, déduites des équations linéaires et homogènes en y, par la transformation

$$y = e^{\int z\,dx}.$$

L'auteur en établit la forme générale, puis montre comment se généralisent, pour ces équations, des propriétés de l'équation de Riccati : il obtient par exemple une relation, entre $2n$ intégrales d'une de ces équations, qui fait intervenir les rapports anharmoniques de ces intégrales.

Vivanti (*G.*). — Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli [Sur le calcul des variations des intégrales multiples] (49-63).

Il s'agit d'abord de déterminer la forme que doit avoir une expression Φ, contenant $n+1$ fonctions x_i de n paramètres v_k et leurs dérivées, pour que son intégrale n-uple ait une valeur indépendante du choix des paramètres. L'auteur avait traité précédemment [1] le cas où Φ contient seulement les dérivées premières des x_i; il étend maintenant sa méthode au cas où Φ contient aussi les dérivées secondes des x_i.

Il forme ensuite l'équation différentielle dont dépend la résolution du problème de calcul des variations correspondant et recherche la condition pour que, dans cette équation, manquent les dérivées quatrièmes des x_i : l'équation se réduit alors au second ordre.

Bäcklund (*A.-V.*). — Einiges über Kugelcomplexe [Sur les complexes de sphères] (65-107).

L'auteur retrouve d'abord l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les sphères principales d'un système appartiennent au complexe (équation différentielle du complexe; Lie) et montre que ses caractéristiques sont lignes de courbure des surfaces intégrales (Lie).

Il forme ensuite la condition pour que deux complexes différents soient en involution, c'est-à-dire pour que les équations différentielles correspondantes aient ∞^1 surfaces intégrales communes. Si la détermination de l'un des complexes, l'autre étant donné, est un problème aisé, il est plus difficile de les déterminer par une relation

$$f(x, y, z, R; x_1, y_1, z_1, R_1) = 0,$$

$x, y, z, R; x_1, y_1, z_1, R_1$ étant les coordonnées du centre et les rayons de deux sphères des complexes contenant l'élément x', y', z', p', q'. En nommant

$$F(x, y, z, R) = 0, \qquad G(x, y, z, R) = 0$$

---

(1) *Rend. di Palermo*, t. XXXIII.

les équations des complexes, il s'agit de déterminer F de façon que les équations aux dérivées partielles en G aient une solution. Sans insister sur l'étude que fait M. Bäcklund de ce problème, j'indique seulement qu'il retrouve, dans un cas particulier, les résultats de Weingarten sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation

$$f(R_1, R_2) = 0.$$

Dans une seconde Partie de son Mémoire, l'auteur établit la condition pour que les ∞^1 surfaces intégrales communes à deux complexes en involution fassent partie d'un système orthogonal. Il l'applique aux complexes homofocaux du second degré.

Enriques (Federigo). — Intorno alla resoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili [Sur la résolution rationnelle d'une classe d'équations algébriques entre quatre variables] (109-111).

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ une équation algébrique, irréductible, de degré 2 en $x_1 x_2$ et de degré n en $x_3 x_4$. Pour que cette équation puisse être résolue rationnellement (les x_i fonctions rationnelles de trois paramètres), il suffit que l'on puisse déterminer quatre fonctions rationnelles de deux variables $x_i(v_1, v_2)$, vérifiant l'équation et telles que x_3 et x_4 ne soient pas liées par une relation indépendante de v_1, v_2.

Hurwitz (A.). — Ueber die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls [Sur les formes d'inertie d'un module algébrique] (113-151).

Étant donné un module algébrique

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

l'auteur nomme *forme d'inertie* de ce module une forme telle que les modules M et

$$M' = (f_1, f_2, \ldots, f_r, T)$$

coïncident, pour les formes dont le degré dépasse une certaine limite. Cette condition est équivalente à la suivante : il existe un produit de puissances des variables X_μ de degré μ tel que

$$X_\mu T = 0 \qquad (M).$$

La plus petite valeur de μ est l'ordre (Stufe) de T.

L'auteur étudie la propriété de ces formes T, surtout dans le cas où les formes f_i sont générales (à coefficients paramètres indépendants). Je cite quelques-uns de ses résultats : Si le produit TT' est forme d'inertie de M, il en est ainsi de l'un des facteurs. Si $r < n$ (n, nombre des variables), le module M est fermé.

Dans le cas où le module M est défini par n formes générales à n variables, il établit une relation entre l'ordre et le degré d'une forme d'inertie de ce module. Il montre comment les formes d'inertie du premier ordre s'expriment à l'aide du déterminant fonctionnel des f_i (qui est lui-même forme d'inertie

du premier ordre) et indique des formules analogues pour les formes d'inertie d'ordre quelconque.

Se bornant, dans la dernière Partie de son Mémoire, aux formes d'inertie de degré zéro, il retrouve le concept de résultante (Mertens) et en établit les propriétés connues.

Levi-Cività (*T.*). — Nuovo sistema canonico di elementi ellittici [Nouveau système canonique d'éléments elliptiques] (153-169).

On sait que, pour étudier, par la méthode de Lagrange, les perturbations d'une planète P, il est commode d'effectuer sur les six variables x, y, z; p_x, p_y, p_z (coordonnées, projections de la quantité de mouvement) un changement de variables canonique, les nouvelles variables étant, l'une exceptée, des constantes du mouvement non troublé. Ces nouvelles variables définissent, à chaque instant, l'orbite osculatrice.

Les changements de variables utilisés introduisent toujours, comme paramètre fixant la position sur l'orbite, l'anomalie moyenne ou la longitude moyenne. Il est désirable, pour simplifier l'expression de la fonction perturbatrice, d'introduire au contraire l'anomalie excentrique.

C'est l'avantage du système canonique proposé par M. Levi-Cività, qui ne diffère *essentiellement* du système de Delaunay

$$\mathrm{L},\quad \mathrm{G},\quad \Theta,\quad l,\quad g,\quad \theta$$

que par la substitution de l'anomalie excentrique u à l'anomalie moyenne.

L'auteur est conduit à ces nouvelles variables par une légère modification de la définition de l'orbite osculatrice à l'instant t : ce sera toujours l'orbite décrite par P si, à partir de cet instant, on annule la fonction perturbatrice, mais en modifiant de plus la masse du corps central de façon que l'énergie qui correspond aux divers mouvements osculateurs soit constante : les orbites osculatrices seront donc isoénergétiques et non isodynamiques. Les nouvelles variables s'introduisent alors comme il suit : l'intégrale complète S de l'équation de Jacobi du mouvement elliptique [1] dépend (h étant considéré comme constant) des paramètres G, θ et k (coefficient d'attraction du corps central). En remplaçant k par une quantité proportionnelle U, les variables de M. Levi-Cività sont :

$$\mathrm{G},\quad \theta,\quad \mathrm{U},\quad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{G}} = g,\qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \theta} = -\Theta,\qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{U}} = u.$$

Hölder (*O.*). — Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals [Nouveau procédé pour obtenir les équations de l'extrémum relatif d'une intégrale] (171-184).

Il s'agit de l'extrémum de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b \mathrm{G}(t, x, y, x', y')\, dt.$$

---

[1] *Cf.* Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 65.

les fonctions $x(t)$, $y(t)$ vérifiant la condition

$$H(t, x, y, x', y') = 0.$$

L'auteur obtient les équations différentielles du problème, sans utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, en écrivant que δI est nul pour des variations δx et δy qu'il détermine effectivement de façon à satisfaire la condition $\delta H = 0$. La méthode est intéressante, bien que plus longue et moins rigoureuse que le procédé classique.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur un théorème général de l'optique (185-192).

L'auteur établit, pour des milieux réfringents quelconques, quelques résultats déjà démontrés pour les milieux isotropes ([1]). Il suffira, pour les rappeler au lecteur, d'indiquer que la formule fondamentale est celle (déjà connue pour les milieux isotropes) qui exprime l'égalité

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1},$$

T étant le temps que met la lumière à aller d'un point P_1 à un point P_2, les dérivées étant calculées par rapport à deux directions : l'une x_1 tangente à l'onde en P_1, l'autre x_2 tangente à l'onde en P_2.

Stäckel (*Paul*). — Ueber die Rektification algebrischer Kurven [Sur la rectification de courbes algébriques] (193-200).

Recherches à propos d'un énoncé d'Euler sur l'impossibilité de trouver une courbe plane algébrique, représentée algébriquement avec le paramètre v, et dont l'arc soit proportionnel au logarithme de v.

Severi (*Francesco*). — Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica [Relations entre les intégrales simples et les intégrales multiples de première espèce d'une variété algébrique] (201-215).

Quand on connaît, sur une surface algébrique, deux intégrales simples de première espèce, on peut en déduire, rationnellement, une intégrale double de première espèce bien déterminée.

L'auteur étend cet important résultat de Nœther en montrant comment on peut construire rationnellement une intégrale S-uple de première espèce d'une variété algébrique V_k à k dimensions, quand on connaît s intégrales simples de première espèce, indépendantes.

La méthode de Nœther étant impraticable, sauf pour $s = k$, l'auteur reprend la question du début, rattachant la théorie de Nœther à des propriétés géométriques des surfaces.

([1]) *Cf.* Straubel, *Physik. Zeitschrift*, 1902-1903, p. 114. On y trouvera aussi des applications de ces résultats.

Fubini (*Guido*). — Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali [Quelques nouveaux problèmes de calcul des variations avec applications à la théorie des équations intégro-différentielles] (217-244).

La première Partie de ce Mémoire est consacrée à l'étude de l'équation en $f(x)$

(1) $$f(x) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{K}(x, x_1, x_2) f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

dont l'auteur cherche une solution, pour une valeur de λ à déterminer et sous la condition

(2) $$\int_0^1 f^2(x)\, dx = 1.$$

Je dégage ici le principe de la méthode employée pour établir l'existence de cette solution. On est conduit à (1) en cherchant l'extrémum de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int\int\int_0^1 \mathrm{K}(x_1 x_2 x_3) f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

avec la condition (2). Supposons donc connue une suite de fonctions u_n vérifiant (2) et donnant à l'intégrale I des valeurs de plus en plus voisines de sa limite inférieure $-d$; il est assez naturel de remplacer cette suite par la suite

$$\psi_n(r) = \frac{1}{d} \int\int \mathrm{K}(x x_1 x_2)\, u_n(x_1)\, u_n(x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

et il reste à montrer, comme le fait M. Fubini, qu'on peut en extraire une suite tendant vers la solution cherchée $\left(\lambda \text{ prenant la valeur } \frac{1}{d}\right)$.

L'auteur se pose ensuite deux problèmes du calcul des variations qui conduisent à des équations intégro-différentielles et les traite directement, sans se servir de l'équation intégro-différentielle correspondante.

Le premier de ces problèmes est relatif à l'extrémum de l'intégrale

$$\mathrm{I}(u) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(u, u', \mathrm{U}, \mathrm{U}', x, \mathrm{X})\, dx\, d\mathrm{X},$$

u étant une fonction inconnue de x, U la même fonction de X.

On trouvera posé le second problème (et déduite l'équation intégro-différentielle correspondante, analogue à l'équation de Laplace) dans les *Leçons sur les fonctions de lignes*, de M. Volterra (p. 53). Pour le résoudre, M. Fubini emploie une méthode analogue à celle qui lui a servi pour le problème de Dirichlet (*Rend. di Palermo*, t. XXIII).

L'auteur dégage enfin, des recherches particulières précédentes, quelques théorèmes généraux, susceptibles d'applications dans des recherches du même ordre.

Bola (Oskar). — Ueber zwei Euler'sche Aufgaben aus der Variations rechnung [Sur deux problèmes d'Euler de calcul des variations] (245-255).

Il s'agit de ces problèmes dans lesquels on recherche l'extrémum d'une fonction de plusieurs intégrales; on sait qu'ils conduisent aux mêmes équations différentielles que le problème isopérimétrique de l'extrémum d'une de ces intégrales, les autres ayant des valeurs fixes.

L'auteur traite ici les deux cas particuliers suivants : déterminer une courbe C, joignant deux points fixes et telle que, si L est une autre courbe donnée joignant les mêmes points, si K_C est l'aire comprise entre C et L, si J_C est la longueur de C, on ait :

Premier problème : $\frac{K_C}{J_C}$ maximum;

Deuxième problème : $J_C K_C$ minimum.

En utilisant la solution classique des problèmes isopérimétriques correspondants, il obtient, de façon très élémentaire, les conditions de l'extrémum *fort* (relatif) pour l'un ou l'autre de ces problèmes. Et la méthode n'est pas limitée à ces cas particuliers.

J. Pérès.

QUATERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Vol. XL, 1909 (¹).

Young (W.-H.) and Grace Chisholm Young. — On derivates and the theorem of the mean [Sur les nombres dérivés et le théorème de la moyenne] (1-26).

$f(x)$ étant supposée finie ou quasi finie et continue dans l'intervalle fermé a, b, et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ existant et étant fini; si, de plus, il n'y a pas de distinction entre la droite et la gauche pour les nombres dérivés de $f(x)$; alors : l'ensemble des points où $f(x)$ a une dérivée est dense partout et a la puissance du continu; la dérivée prend toute valeur entre sa borne supérieure et sa borne inférieure dans tout intervalle fermé contenu dans a, b; les bornes de la dérivée sont les mêmes que celles de $\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}$ dans tout intervalle contenu dans a, b; il y a une valeur

$$a+\theta(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

pour laquelle

$$f'[a+\theta(b-a)] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLII, 1918, 2ᵉ Partie, p. 14.

N. B. — Erratum : *B. S. M.*, t. XLII, 2ᵉ série, seconde Partie, page 14, ligne 9, *au lieu de :* Tome XXXVIII, 1907; *lire :* Tome XXXIX, 1908.

en tout point où les nombres dérivés sont égaux et finis, ils ont les mêmes nombres dérivés. Généralisation des résultats précédents en remplaçant

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{par} \quad \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

Dickson (L.-E.). — On the last theorem of Fermat (second paper) [Sur le dernier théorème de Fermat (second Mémoire)] (27-45).

En transformant l'égalité $u^n + v^n + w^n = 0$ en congruence $(\bmod p)$, où p est un nombre premier de la forme $mn+1$, l'auteur arrive à ce résultat que l'équation est impossible en nombres entiers dont aucun ne soit divisible par n pour tout nombre premier $n < 7000$, sauf, peut-être, pour $n = 6857$.

Watson (G.-A.). — A series for the square of the hypergeometric function [Une série pour le carré de la fonction hypergéométrique] (46-57).

Cette série est

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x)^2 = \left[\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}\right]^2 \frac{2^{2-2\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \times \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{\Gamma(\alpha+n)\,F(2\beta+n)}{n!\,\Gamma(\gamma+\beta+n)}$$

$$\times \int_0^1 z^{2\beta-1} F\left[-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(1-n); 1-n-\alpha; z^2\right]$$

$$\times F\left[\beta+\frac{1}{2}n, \beta+\frac{1}{2}(n+1); \beta+\gamma+n; z^2\right] \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pourvu que

$$R(\beta) > 0, \qquad R(\gamma-\beta) > 0 \qquad (R = \text{partie réelle de}\ldots).$$

Autre formule :

$$e^{4\beta\pi i-1} F(\alpha, \beta; \gamma; x)^2 = \text{la même expression que plus haut},$$

mais l'intégrale étant prise le long d'un contour partant d'un point P pris sur Ox infiniment voisin de x et à gauche, tournant autour de O dans le sens positif et revenant en P sans envelopper les points $x = \pm 1$. Cette nouvelle formule est applicable, pourvu seulement que $R(\gamma-\beta) > 0$.

Glaisher (J.-W.). — On the number of partitions of a number into a given number of parts [Sur le nombre de partitions d'un entier en un nombre donné de parties] (57-143).

Nombreuses formules tirées de la considération des dérivations littérales des puissances d'une lettre par la méthode d'Arbogast. On considère le nombre $G_n(x)$ de partitions de $x+n$ en n parties; le nombre $G_n(x, \alpha^p, \beta^q, \ldots)$ de partitions de $x+n$ en n parties dont p sont égales entre elles, q autres égales entre elles mais différentes des précédentes, etc.; le nombre $G_n(x, A^p, B^q, \ldots)$ défini de la même façon, mais avec cette condition en plus que les p premières parties sont plus petites que les q secondes, etc. Ces quantités sont exprimées au moyen

de x et des nombres n_x, n_{x+1}, ..., n_{x+n}, où $n_i = 1$ quand i est divisible par n et égale zéro dans le cas contraire. Les calculs sont faits jusqu'à la valeur 9 de l'indice n. On donne aussi des formules où s'introduisent les nombres de partitions en n parties prises dans des nombres donnés.

Young (W.-H.) and Grace Chisholm Young. — And additional note on derivates and the theorem of the mean [Note additionnelle sur les nombres dérivés et le théorème de la moyenne] (144-145).

Chacun des rapports

$$\frac{f^-(x)}{F^-(x)}, \quad \frac{f^+(x)}{F^+(x)}, \quad \frac{f_-(x)}{F_-(x)}, \quad \frac{f_+(x)}{F_+(x)}$$

prend des valeurs $\leqq \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ et aussi des valeurs $\geqq$ que cette même expression, en des points intérieurs à l'intervalle (a, b) (dans des conditions définies dans le Mémoire précédent).

Young (W.-H.). — Note on a remainder form of Taylor's theorem [Note sur une forme du reste dans le théorème de Taylor] (146-153).

La formule de Schlömilch et Roche

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n(1-\theta)^\nu}{(n-\nu)(n-1)!} f^n(a+\theta h)$$

s'applique dans les conditions suivantes : $f(x)$ est finie et continue pour $a \leqq x \leqq a+h$; les dérivées de $f(x)$ jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ inclusivement le sont pour $a < x < a+h$; ν est un entier positif $< n+1$.

On peut même supposer $f(z)$ finie et continue seulement pour $a < x < a+h$, pourvu que l'on écrive $f(a+h-0)$, au lieu de $f(a+h)$ et $f(a+0)$, $f'(a+0)$, ..., $f^{(n-1)}(a+0)$ au lieu de $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$.

Jourdain (Philip.-E.-B.). — Note on an analogue of Gauss's principle of least constraint [Note sur un principe analogue à celui de moindre contrainte de Gauss] (153-157).

Ce principe est en quelque sorte intermédiaire entre celui de d'Alembert et celui de Gauss. Il s'exprime par

$$\sum_r m_r(x''_r \delta x'_r + \ldots) = \sum_r (X_r \delta_1 x_r + \ldots)$$

où

$$\delta_1 t = \delta_1 x_r = \ldots = 0.$$

Young (*W.-H.*). — On Taylor's theorem [Sur le théorème de Taylor] (157-167).

Pour que $f(a)+hf'(a)+\ldots$ *ad inf.* converge vers $f(a+h)$ pour $0 \leqq h < b$, il est nécessaire et suffisant :

1° Que $f(a+h)$ et toutes ses dérivées existent dans cet intervalle;

2° Étant donné H ($0 < H < b$), l'expression $\left|\frac{(H-h)^{n-p}}{(n-p)!} f^{(n)}(a+h)\right|$ est bornée pour toutes les valeurs de n et de h telles que

$$n \text{ entier}, \qquad 0 < n \leqq p, \qquad 0 < h \leqq H,$$

p est un entier positif, négatif ou nul, fixé.

Dickson (*L.-E.*). — On commutative linear groups [Sur les groupes linéaires commutatifs] (167-196).

Exposition élémentaire des théorèmes fondamentaux sur les groupes de transformations linéaires, homogènes, commutatives, dans un domaine quelconque.

L'auteur donne une démonstration élémentaire de la forme canonique de ces transformations. Il donne quelques exemples où il relève des erreurs de détail commises par les auteurs précédents. Le champ des variables est tout à fait arbitraire.

Miller (*G.-A.*). — On the groups generated by two operators (s_1, s_2) satisfying the equation $s_1 s_2 = s_2^\alpha s_1^\beta$ [Sur les groupes engendrés par deux opérateurs (s_1, s_2) satisfaisant l'équation $s_1 s_2 = s_2^\alpha s_1^\beta$] (197-209).

Le cas où l'un des nombres α, β égale 0 ou 1 est immédiat. L'auteur examine les cas

$$\alpha = \beta = 2, \qquad \alpha = 3 \qquad \beta = 2, \qquad \alpha = \beta = 4$$

et analyse dans chaque cas la constitution du groupe (en ajoutant des conditions supplémentaires). Voici, par exemple, le premier théorème obtenu : « Si $\alpha = \beta = 2$, si de plus les ordres de s_1 et de s_3 sont égaux à 6 et l'ordre de $s_1 s_2$ égal à 2, alors le groupe engendré est le produit direct du groupe tétraédral et du groupe d'ordre 2. »

Basset (*A.-B.*). — A revision of the theory of twisted curves and of singular tangent planes to anautotomic surfaces [Révision de la théorie des courbes gauches et des plans tangents singuliers aux surfaces anautotomiques] (210-245).

Démonstrations simplifiées et rigoureuses des formules de Salmon, Cayley, Crémona. Ces formules, développements de celles de Plücker, sont des relations

entre le degré, la classe, le nombre de points doubles, le nombre de plans doublement osculateurs, etc.

Burnside (*W.*). — On the groupe of the twenty-seven lines of a cubic surface [Sur le groupe des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre] (246-250).

M. Burkhardt a démontré que ce groupe, qui est d'ordre 51840, peut être représenté comme un groupe de substitutions linéaires à coefficients rationnels sur six variables. L'auteur trouve la forme de ces substitutions par un procédé très simple, en considérant les 45 triangles et les 36 double-assemblages de six (deux séries de six droites telles que chaque droite en rencontre cinq de l'autre série, deux droites d'une série ne rencontrant pas les mêmes cinq de l'autre). Il montre de plus qu'on peut transformer ces substitutions de façon que leurs coefficients soient non seulement rationnels, mais entiers.

Young (*W.-H.*). — Proof of the continuity and differentiability of power series by the method of monotone sequences [Preuve de la continuité et de la différentiabilité des séries de puissances, par la méthode des suites monotones] (251-257).

Par cette méthode, on évite la notion de convergence uniforme. Elle consiste à considérer $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ comme la limite commune des fonctions

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots, \qquad a_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots, \qquad a_0 + a_1 x + A_2 X^2 + \ldots$$

d'une part, et

$$-A_0 - A_1 X - A_2 X^2 - \ldots, \qquad a_0 - A_1 X - A_2 X^2 - \ldots, \qquad a_0 + a_1 x - A_2 X^2 - \ldots$$

d'autre part (X constant $> |x|$, $A_i = |a_i|$).

Ces suites sont monotones, c'est-à-dire que, dans la première, chaque fonction est $\leqq$ à la précédente, et dans la seconde, chaque fonction est $\geqq$ à la précédente. De plus, toutes ces fonctions sont continues; donc, etc.

Richmond (*H.-W.*). — On automorphic functions in relation to the general theory of algebraïc curves [Sur les fonctions automorphes dans leurs relations avec la théorie générale des courbes algébriques] (258-274).

Extension à l'espace à plus de deux dimensions des théorèmes de Poincaré et Humbert sur la représentation paramétrique des courbes algébriques planes par des fonctions automorphes. Applications au théorème de Riemann-Roch et aux formules de Plücker.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Formulæ for partitions into given elements derived from Sylvester's theorem [Formules pour les partitions en éléments donnés déduites du théorème de Sylvester] (275-348).

Le théorème de Sylvester est que le nombre de partitions d'un entier x en parties prises parmi les entiers a, b, c, ... les répétitions étant permises, est égal à ΣW_q étendue à tous les diviseurs q de a, b, c, ..., en désignant par W_q le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement de $\sum \frac{\rho^x e^{xt}}{(1-\rho^{-a}e^{at})(1-\rho^{-b}e^{-bt})\ldots}$ étendue à toutes les racines primitives ρ de $t^q - 1 = 0$.

Le Mémoire de l'auteur a pour but le calcul de ces expressions W_q, principalement pour $q \leqq 6$ et en particulier dans le cas où a, b, c, ... forment la suite des entiers positifs.

Dickson (*L.-E.*). — Combinants [Combinants] (349-366).

Il s'agit des combinants d'un système de formes de même degré, les coefficients étant pris dans un champ quelconque. Nombre de ces combinants linéairement indépendants. Cas des formes quadratiques, binaires ou ternaires. Conditions d'équivalence de deux systèmes de deux formes.

Miller (*G.-A.*). — Note on the groups generated by operators transforming each other into their inverses [Note sur les groupes engendrés par des opérateurs se transformant l'un l'autre en leurs inverses] (366-367).

Si n opérateurs t_1, t_2, ..., t_n, dont deux quelconques ne sont pas échangeables, sont tels que les $n(n-1)$ équations

$$t_k^{-1}\, t_\lambda\, t_k = t_\lambda^{-1} \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq \lambda)$$

soient satisfaites, alors $n = 2$ ou 3. Le groupe engendré est soit le groupe des quaternions, soit le groupe hamiltonien d'ordre 16.

Whipple (*F.-J.-W.*). — On Lagrange's and other theorems and on the solution of equations by logarithmic series [Sur le théorème de Lagrange et autres, et sur la solution des équations par des séries logarithmiques] (368-373).

Si α est la racine de plus petit module de $\psi(z) = 0$ et si $f(z)$ est une fonction régulière, on a

$$f(\alpha) - f(0) = \text{le coefficient de } \frac{1}{z}$$

dans le développement de

$$-f'(z) \log \frac{\psi(z)}{z},$$

pourvu que ce développement soit valable pour certaines valeurs de z. Extension au cas où $f(z)$ a des pôles. Extension à d'autres racines de ψ que celle de plus petit module. Exemples.

Young (*W.-H.*). — On sequences of asymmetricaly continuous functions [Sur les suites de fonctions asymétriquement continues] (374-380).

Dans un article du *Messenger of Mathematics*, t. XXXVII, p. 49, l'auteur avait, à propos du théorème de Baire : « La fonction limite d'une série de fonctions continues est une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait », avancé qu'on pouvait remplacer dans l'énoncé le mot « continues » par l'expression « continues d'un côté au moins ». Il montre ici qu'il s'est trompé en général et que sa remarque ne vaut que si l'on ajoute que l'ensemble est parfait des deux côtés (les points limites doivent être limites des deux côtés). Extension aux fonctions de plusieurs variables.

Dixon (*A.-C.*). — An elementary discussion of Schläfli's double six [Discussion élémentaire du double assemblage de six de Schläfli] (381-384).

L'auteur démontre les propriétés de cet assemblage par une méthode élémentaire, entre autres le théorème suivant, : « Soient a, b, c, d, e, f les droites de l'un des systèmes; 1, 2, 3, 4, 5, 6 celles de l'autre; a rencontrant 2, 3, 4, 5, 6; b rencontrant 1, 3, 4, 5, 6, ... » Appelons a_2 le point d'intersection de a et de 2, ... Alors, les quatre couples de plans menés par b et a_3, b et c_2; par b et a_4, b et d_2; par b et a_5, b et e_2; par b et a_0, b et f_2 sont en involution. Il y a 60 de ces involutions. Comme conséquence,

$$(c_2\, d_2\, e_2\, f_2) = (a_3\, a_4\, a_6\, a_0), \qquad \ldots.$$

E. Cahen.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

Tome LXVIII. 1909-1909 (¹).

Favaro (A.). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXII. Michele Coignet [Amis et correspondants de Galilée : XXII. Michel Coignet] (1-161).

Lori (F.). — [T 7] Le dimensioni più opportune dei rocchetti di autoinduzione senza ferro per ottenero fenomeni di risonanza ellettromagnetica [Les dimensions les plus convenables des bobines d'autoinduction sans fer pour obtenir des phénomènes de résonance électromagnétique] (17-22).

Cisotti (U.). — [B 12] Espressione del prodotto vettoriale in coordinate generali [Expression du produit vectoriel en coordonnées générales] (33-37).

Rosati (C.). — [$M_1 2c$ ref. Q2] Sugli spazi normali delle varietà algebriche [Sur les espaces normaux des variétés algébriques] (75-84).

Étant F_2^d une surface normale en S_r, à courbes sections de genre p, δ la déficience et i l'indice de spécialité de la série caractéristique du système linéaire constitué par les sections hyperplanes, le théorème de Riemann-Roch donne

$$r = d - 1 - (p - i + \delta).$$

L'auteur trouve une formule analogue pour la dimension de l'espace normal d'une variété de k dimensions. La déficience δ de la série determinée par les hyperplans sur les courbes sections est la somme de $k - 1$ déficiences, dont, si l'une est nulle, le sont aussi les précédentes.

Dans le Tome LXIX (p. 599), il y a une autre Note du même auteur, où il démontre que les déficiences s_1, s_2, s_3, ... des systèmes déterminés par un système linéaire et par les systèmes caractéristiques successifs satisfont aux inégalités

$$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \cdots$$

Severi (F.). — [$M_2 8$] Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero [Les surfaces algébriques à courbe canonique d'ordre zéro] (249-260).

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLII, 1918, 2ᵉ Partie, p. 47.

Les modules de ces surfaces sont au nombre de 19. Ces surfaces sont distribuées en familles birationnellement irréductibles entre elles, suivant le genre minimum des courbes tracées sur elles.

Boggio (T.). — [H 10] Sopra una trasformazione delli funzione poliarmoniche [Sur une transformation des fonctions polyharmoniques] (309-314).

Une transformation par rayons vecteurs réciproques transforme en elle-même l'équation

$$\Delta_{2m} = 0.$$

Severini (C.). — [D 1] Sopra alcune proprietà comuni a più serie di funzioni di uso frequente nell' analisi [Sur certaines propriétés communes à plusieurs séries de fonctions d'un usage fréquent dans l'analyse] (337-350).

Conséquences d'un théorème de M. Stekloff [*Mém. de l'Acad. Imp. de Saint-Pétersbourg*, 8ᵉ série (classe de Sciences), vol. XV].

Cisotti (U.). — [T 7] Sui campi elettromagnetici puri, simmetrici rispetto ad un asse [Sur les champs magnétiques purs, symétriques par rapport à un axe] (361-394).

Dans un champ électromagnétique pur, l'électricité est supposée se mouvoir sans intromission de matière pondérable (*voir* la Note de M. Levi-Civita dans le Tome LXVII, 1907-1908, p. 995), ni de liens cinématiques entre les charges. Analytiquement, ils sont déterminés par un système différentiel complet. Des solutions ont été données par M. Levi-Civita (*voir* Note citée et aussi *Comptes rendus*, 19 août 1907, p. 417; et *Rend. dei Lincei*, 1909, 1ᵉʳ semestre, p. 83): par Mˡˡᵉ Caffaratti (*Nuovo Cimento*, mai 1908, p. 369) et par M. Cisotti même (*Nuovo Cimento*, janvier-février 1909).

Ici l'auteur donne deux autres catégories de solutions correspondant à des mouvements permanents symétriques par rapport à un axe.

Boggio (T.). — [H 9 h 3] Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali [Sur les solutions communes à deux équations linéaires aux dérivées partielles] (395-406).

Application de la formule donnée par M. d'Arcais (voir ces *Atti*, t. LXVII, p. 191) pour les équations différentielles ordinaires. L'auteur avait déjà traité la question des solutions communes dans les *Annali di Matematica* (3ᵉ série, t. VIII, 1903).

Levi-Civita (T.). — [U 6 d] Sulle forma dell' anello di Saturno [Sur la forme de l'anneau de Saturne] (557-583).

Étant C la directrice et τ les sections normales à la directrice, l'auteur étudie le cas où C n'est pas un cercle. La forme de C est déterminée par un système d'équations analogues à celles de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible, et qui, en dehors des solutions correspondant à une directrice circulaire, ont d'autres solutions en nombre infini, entre lesquelles est comprise une double infinité de courbes planes. Celles que l'auteur étudie particulièrement sont les configurations peu différentes du cercle.

Larice (*I.*). — [P 4 c] Sulle trasformazioni cremoniane [Sur les transformations de Crémona] (731-756).

Formules permettant de déterminer tous les systèmes homoloïdiques d'ordre n, en connaissant ceux des ordres 2, 3, ..., $n-1$. Ces systèmes peuvent se construire au moyen de la surface de Veronèse.

Dell' Agnola (*C.-A.*). — [D 1 a] Le funzioni discontinue e il teorema di Baire [Les fonctions discontinues et le théorème de Baire] (769-783).

Nouvelle démonstration de ce théorème (Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris, Gauthier-Villars, 1905).

Une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b), *ponctuellement* discontinue dans tout ensemble parfait, est de classe 1 (c'est-à-dire qu'elle peut se considérer comme limite d'une succession de fonctions continues).

Severi (*F.*). — [M_2 8] Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica [Coup d'œil d'ensemble sur la géométrie sur une surface algébrique] (829-838).

Nouveau moyen d'introduire la notion de genre arithmétique et d'en déduire le théorème de Riemann-Roch.

Caldarera (*F.*). — [R 1 a] Dei moti di punti materiali aventi accelerazioni tangenziali in ragione costante cogli spazi percorsi [Sur les mouvements de points matériels dont l'accélération tangentielle a un rapport constant avec l'espace parcouru] (883-896).

Tome LXIX; 1909-1910.

Dell' Agnola (*C.-A.*). — [D 1] Sulla convergenza uniforme di una successione di funzioni continue [Sur la convergence uniforme d'une succession de fonctions continues] (151-159).

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme est que l'oscillation de la succession soit identiquement nulle dans l'intervalle donné.

Viterbi (*A.*). — [U 10] Alcune formule relative alle traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie ed applicazione di esse allo studio delle superficie di livello terrestri [Quelques formules relatives aux trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces et leur application à l'étude des surfaces de niveau sur la Terre] (161-181).

D'Arcais (*F.*). — [J 2] Sopra due problemi di calcolo delle probabilità [Sur deux problèmes de calcul des probabilités] (271-290).

Premier problème (de Moivre) : Probabilité d'un joueur d'en ruiner un autre. Solution donnée en déterminant les constantes sans les poser toutes, moins deux, égales à zéro comme fait Moivre. Extension au cas de plusieurs joueurs.

Second problème (de Rouché) : valeur probable du nombre de parties jouées jusqu'à la ruine de l'un des joueurs.

Les solutions sont obtenues en appliquant la méthode des fonctions caractéristiques de Laplace.

Levi-Civita (*T.*). — [D 1] Sul teorema di esistenza delle funzioni implicite [Sur le théorème d'existence des fonctions implicites] (291-302).

Démonstration par approximations successives, qui donne aussi le moyen de construire pratiquement ces fonctions.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e correspondenti di Galileo Galilei : XXIV. Marino Ghetaldi [Amis et correspondants de Galilée : XXIV. Marino Ghetaldi] (303-324).

Severi (*F.*). — [H 6] Sul metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari ai differenziali totali [Sur la méthode de Mayer pour l'intégration des équations linéaires aux différentielles totales] (419-425).

Démonstration différente de celle de Mayer, et préférable au point de vue didactique, qui réduit la question à celle de l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires. Interprétation géométrique.

Cisotti (*U.*). — [S 2 eα] Sul moto permanente d'un solido in un fluido indefinito [Sur le mouvement permanent d'un solide dans un fluide indéfini] (427-445).

Étant R la résultante et M le moment résultant des actions exercées par le fluide sur le solide doué d'un mouvement hélicoïdal, les *résistances directes*, c'est-à-dire les composantes de R et M suivant l'axe du mouvement, sont toujours nulles. Pour les *actions déviatrices* (les composantes de R et M suivant un plan normal à l'axe du mouvement), si le mouvement subordonné du liquide est irrotationnel, leur résultante et leur moment résultant tendent à déplacer l'axe parallèlement à lui-même et à le faire tourner autour d'une direction qui lui est normale. Pour une sphère, les actions déviatrices sont nulles.

Sibirani (*F.*). — [B1 ref. H10] Un determinante affine a quello di Vandermonde [Sur un déterminant analogue à celui de Vandermonde] (447-451).

Rosati (*C.*). — [$M_2$8] Intorno alla sovrabbondanza di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica [Sur la surabondance d'un système linéaire de courbes appartenant à une surface algébrique] (529-544).

La surabondance d'un système linéaire | C | est égale à la déficience de la série que le système adjoint à un multiple de | C | détermine sur une courbe du multiple immédiatement supérieur, ou à celle de la série que le système adjoint à un multiple de | C | détermine sur une courbe de l'adjoint au multiple immédiatement inférieur. L'indice de spécialité de la première série surpasse d'une unité la dimension de | C |, celui de la seconde est égal à celui de | C |.

Smeraldi (*F.*). — [T2] Alcune costruzioni grafiche relative alle travi rettilinee perfettamente incastrate agli estremi [Quelques constructions graphiques relatives aux poutres rectilignes parfaitement encastrées aux bouts] (637-683, une planche).

Burali-Forti (*C.*). — [O5*m* ref. B12] Sulla rappresentazione sferica di Gauss [Sur la représentation sphérique de Gauss] (693-723).

Applications du calcul vectoriel.

Pennacchietti (*G.*). — [R8*f* α] Sulle forme più semplici degli integrali delle equazioni differenziali del moto di un punto materiale [Sur les formes les plus simples des intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel] (725-730).

Recherche de tous les problèmes de mouvement d'un point soumis à une force ayant un potentiel, et admettant deux intégrales linéaires par rapport aux composantes de la vitesse.

Lori (F.). — [T 7c] Alcuni problemi relativi ai circuiti con forze elettromotrici alternate [Sur certains problèmes relatifs aux circuits à forces électromotrices alternées] (731-735).

Comessatti (A.). — [M_1 2] Determinazione dei gruppi di $r+1$ punti communi ad $r+1$ serie lineari g_n^r [Détermination des groupes de $r+1$ points communs à $r+1$ séries linéaires g_n^r] (871-881).

Boggio (T.). — [S 2 eα ref. B 12] Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito [Sur le mouvement permanent d'un solide dans un fluide indéfini] (883-891).

Application de l'analyse vectorielle au calcul de la résistance opposée par le fluide.

Pasini (C.). — [U 10] Sulla determinazione dell' errore angolare di chiusura di una poligonale topografica [Sur la détermination de l'erreur angulaire de fermeture d'un polygone topographique] (919-931, une planche).

Bordiga (G.). — [M_2 6cα] Le superficie razionali di sesto ordine che passano doppiamente per gli spigoli di un tetraedro [Sur les surfaces rationnelles du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre] (1027-1045, une planche).

Ricci (G.). — [C 2] Del concetto di successione in relazione col teorema fondamentale del calcolo integrale [Sur la notion de succession, en relation avec le théorème fondamental du calcul intégral] (1055-1060).

Dell'Agnola (C.-A.). — [D 1] Delle varie specie di convergenza uniforme [Sur les différentes espèces de convergence uniforme] (1083-1102).

Dell'Agnola (C.-A.). — [D 1] Sulle funzioni egualmente continue [Sur les fonctions également continues] (1103-1109).

$\Omega(x)$ est une fonction que l'auteur définit comme la limite inférieure de la plus grande entre les limites de la succession

$$\omega_1(x, \xi), \quad \ldots, \quad \omega_n(x, \xi).$$

$\omega_n(x, \varepsilon)$ étant l'oscillation de $f_n(x)$ dans le domaine $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ du point x quelconque de l'intervalle (a, b). Cela posé, la condition pour que les fonctions de la succession

$$f_1(x_1), \quad \ldots \quad f_n(x)$$

soient *uniformément continues* dans (a, b) est qu'il soit

$$\Omega(x) = 0.$$

Viterbi (*A.*). — [U 6*d*] Su una classe speciale di forme dell' anello di Saturno [Sur une classe spéciale de formes de l'anneau de Saturne] (1129-1149).

Voir la Note de M. Levi-Civita à la page 557 de ce Tome. M. Viterbi trouve d'autres solutions à directrices peu différentes du cercle, non situées dans un plan normal à l'axe de rotation, mais dans un plan passant par cet axe et qui tourne uniformément.

Antoniazzi (*A.*). — [U] Posizione del nucleo e direzione della coda della cometa di Halley nell' attuale sua apparizione, osservate alla specola di Padova [Position du noyau et direction de la queue de la comète de Halley dans son apparition actuelle, observées à l'Observatoire de Padoue] (1213-1247, un tableau).

Tome LXX, 1910-1911.

Cisotti (*U.*). — [S 2] Integrale generale dei piccoli moti ondosi di tipo permanente in canali molto profondi [Intégrale générale des petits mouvements onduleux de type permanent en des canaux très profonds] (33-47).

Silla (*L.*). — [R 4*b*] Sopra alcune determinazioni relative all' equilibrio dei fili sulle superficie [Sur certaines déterminations relatives à l'équilibre des fils sur les surfaces] (249-256).

Antoniazzi (*A.*). — [U] Il valore medio delle parallasse solare risultante delle osservazioni dei passaggi del pianeta « Eros » fatte all' equatoriale Dembowski (obb. 187^{mm}) dell' Osservatorio di Padova da 23 ottobre 1900 a 13 febbraio 1901 [La valeur moyenne de la parallaxe solaire résultant des observations des passages de la planète « Eros » faites à l'équatorial Dembowski

(objectif de 187^{mm}) de l'Observatoire de Padoue, du 23 octobre 1900 au 13 février 1901] (309-336).

Cette valeur est 8",795 ± 0",024.

Severi (*F.*). — [M_1 2, M_2 8] Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie [Quelques relations d'équivalence entre groupes de points d'une courbe algébrique ou entre courbes d'une surface] (373-382).

Deux courbes qui déterminent des groupes équivalents sur les courbes C d'un système continu quelconque Σ, même différent d'un faisceau, sont équivalentes ou bien elles diffèrent par des courbes fondamentales de Σ.

Extension aux variétés des espaces supérieurs.

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D 1] Sulle successioni uniformemente convergenti [Sur les successions uniformément convergentes] (383-391).

Olivo (*M.*). — [R 5*a*] Sui potenziali di semplice e di doppio strato in prossimità dell'agente [Sur les potentiels de simple et de double couche dans le voisinage de l'agent] (519-546).

Rossi (*L.-V.*). — [X 8] Estensimetro moltiplicatore per costruzioni metalliche [Extensimètre multiplicateur pour constructions métalliques] (557-564).

Antoniazzi (*A.*). — [U] Cenni storici sopra l'orbita del pianeta (363) Padova. Elementi ed effemeride per l'attuale sua opposizione [Notice historique sur l'orbite de la planète (363) Padoue. Éléments et éphéméride pour son opposition actuelle] (603-616).

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei: XXV. Tommaso Segeth [Amis et correspondants de Galilée: XXV. Thomas Segeth] (617-654).

Padova (*E.*). — [T 3] Il fotometro Zöllner-Wolfer applicato allo studio del cuneo del fotometro registratore Müller [Le photomètre Zöllner-Wolfer appliqué à l'étude du coin du photomètre registrateur Müller] (675-691).

Crudeli (*U.*). — [S 2 *e* α] Sul movimento traslatorio di un solido di rivoluzione in un fluido viscoso [Sur le mouvement de translation d'un solide de rotation dans un fluide visqueux] (1131-1139).

Tonolo (*A.*). — [H 9 *d*] Sull' esistenza di soluzioni fondamentali di una equazione alle derivate parziali del tipo ellittico [Sur l'existence de solutions fondamentales d'une équation aux dérivées partielles du type elliptique] (1167-1176).

Une droite étant donnée, il y a des solutions de la forme

$$\mathrm{A}\log r^2 + \mathrm{B}$$

pour l'équation

$$\Delta^2 u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + d = 0,$$

les coefficients étant holomorphes dans le voisinage de la droite, et A, B étant holomorphes dans le même voisinage et, de plus, sur la droite, que l'on a supposé être l'axe des z, étant

$$\mathrm{A} = -\mu(z),$$

où μ est une fonction holomorphe représentant la densité linéaire.

Favaro (*A.*). — [V 7] Alla ricerca delle origini del motto : « Eppur si muove » [A la recherche des origines du mot « Eppur si muove »] (1219-1232).

Viterbi (*A.*). — [U 6 *d*] Sulle directrici piane dell' anello di Saturno [Sur les directrices planes de l'anneau de Saturne] (1311-1333).

Travail se rattachant à celui de M. Levi-Civita (voir ces *Atti*, t. LXVIII, p. 557). Les courbes pouvant servir comme directrices doivent satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \mathrm{F}(\rho)$$

étant

$$\mathrm{F}(\rho) = \frac{1}{16\lambda^2}\left\{1 - h\rho + \frac{1}{2}\rho^3\right\}^4 - \rho^2$$

avec λ, h constantes arbitraires et $\lambda > 0$. M. Levi-Civita étudie le cas où les courbes en question ont une forme peu différente du cercle; l'auteur traite la question en général en déterminant les solutions et les conditions pour λ et h afin que la courbe soit fermée. Il se fonde sur un théorème de Weierstrass.

Lorenzoni (*G.*). — [U] Lo strumento universale all' Osservatorio astronomico di Padova [L'instrument universel à l'Observatoire astronomique de Padoue] (1343-1365).

Silva (*G.*). — [U] Lo strumento universale « Bamberg » del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Padova, studiato nelle sue parti e usato per una determinazione di latitudine col metodo delle distanze zenitali meridiane [L'instrument universel « Bamberg » du laboratoire de Géodésie de l'Université royale de Padoue, étudié dans ses parties et employé pour une détermination de latitude par la méthode des distances zénithales méridiennes] (1367-1443).

Tome LXXI; 1911-1912.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXVI. Giovanni Wedderburn. — XXVII. Riccardo White. — XXVIII. Riccardo Willongby [Amis et correspondants de Galilée : XXVI. Jean Wedderburn. — XXVII. Richard White. — XXVIII. Richard Willongby] (1-29).

Favaro (*A.*). — [V 7] Lettera inedita di Ugo Grozio a Lorenzo Realio, concernente la proposta di Galileo agli stati Generali delle Provincie Unite dei Paesi-Bassi per la determinazione delle longitudini [Lettre inédite de Hugues Grotius à Laurent Réalius, concernant le projet de Galilée aux États généraux des Provinces unies des Pays-Bas pour la détermination des longitudes] (31-38).

Soler (*E.*). — [U 10] Sulle espressioni della gravità per talune superficie di rotazione [Sur les expressions de la gravité pour certaines surfaces de rotation] (133-144).

Cisotti (*U.*). — [S 2 *ex*] Osservazioni sul moto permanente di una sfera in un liquido indefinito [Observations sur le mouvement permanent d'une sphère dans un liquide indéfini] (167-174).

Le mouvement subordonné du liquide est supposé continu et sans tourbillons.

Les pressions du liquide sur les éléments de surface sphérique sont équivalentes à une force unique qui tend à éloigner la sphère de l'axe du mouvement.
Application de l'analyse vectorielle.

Levi-Civita (*T.*). — [R 8 *a*] Sullo spostamento dell' equilibrio [Sur le déplacement de l'équilibre] (241-249).

Les théorèmes de Rayleigh sur l'équilibre des systèmes matériels (*Phil. Magazine*, t. XLIX, 1875) portent à des conclusions qui, pour ce qui concerne la stabilité, ne peuvent être appliquées sans distinction à tous les états voisins de l'état d'énergie minimum. Étant $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ l'énergie du système et

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l) \qquad (l < n)$$

les liaisons, U le potentiel des forces extérieures, on a pour l'équilibre

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} + \sum_1^l {}_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

et pour la stabilité il faut avoir

$$\delta^2(\Omega - U) > 0.$$

Or on a

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i,$$

où

$$A = \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \, \partial x_k} \delta x_i \, \delta x_k,$$

$$B = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_k} \delta x_i \, \delta x_k,$$

et où le terme

$$\alpha = \sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i$$

provient des liaisons. Lorsque les liaisons sont des équations linéaires, on a $\delta^2 x_i = 0$ et l'équilibre déplacé est stable dans tout champ uniforme de force. S'il n'y a pas de forces extérieures, $U =$ const., et l'énergie intérieure Ω dans la configuration d'équilibre par rapport aux liaisons a un minimum (deuxième théorème de Rayleigh).

Lorsque Ω est une forme quadratique par rapport aux coordonnées, les liaisons sont linéaires et homogènes et les forces extérieures sont constantes; par suite, la configuration d'équilibre déplacé rend Ω maximum par rapport aux valeurs correspondant à tout nouvel état d'équilibre qui aurait lieu ensuite de l'introduction de nouvelles liaisons.

Greggi (*G.*). — [H 11] Le formole risolutive e i teoremi di Schmidt per i sistemi di equazioni integrali [Les formules de résolution et les théorèmes de Schmidt pour les systèmes d'équations intégrales] (541-551).

Severi (*F.*). — [N$_2$1] Sulle congruenze solenoïdali [Sur les congruences solénoïdales] (769-774).

Étant a un rayon d'une congruence Σ et τ_a l'ensemble (tuyau infinitésimal) des rayons de Σ infiniment rapprochés de a, si les sections de τ_a pour des plans perpendiculaires à a ont toutes même aire, la congruence Σ est appelée *solénoïdale.*

L'auteur démontre, par voie synthétique, le théorème suivant, établi analytiquement par M. Cisotti (*Rend. des Lincei*, t. XIX, 1910, p. 325) :

« Toute congruence solénoïdale est formée par les droites menées sur les plans osculateurs d'une courbe parallèlement aux tangentes respectives, et toute congruence formée de cette manière est solénoïdale. »

D'Arcais (*F.*). — [C 1 *a*] Sul teorema della inversibilità dell'ordine delle derivazioni [Sur le théorème de l'inversibilité des ordres de dérivation] (819-822).

Bottasso (*M.*). — [H 11] Sull' equazione alle potenze di una equazione secolare ed applicazione alle equazioni integrali [Sur l'équation aux puissances d'une équation séculaire, et application aux équations intégrales] (917-930).

Favaro (*A.*). — [V 3, 6] Archimede e Leonardo da Vinci [Archimède et Léonard de Vinci] (953-975).

Antoniazzi (*A.*). — [U] Elementi ed effemeride del pianeta (363) Padova per la opposizione del 1912 [Éléments et éphéméride de la planète (363) Padoue pour l'opposition de 1912] (977-979).

Tonolo (*A.*). — [R 8 *i*] Una generalizzazione della teoria del triedro mobile [Une généralisation de la théorie du trièdre mobile] (1075-1087).

Généralisation des composantes des rotations, des formules de Poisson et des conditions qui lient les composantes des rotations dans la théorie du trièdre mobile. Application du calcul différentiel absolu de M. Ricci.

Trevisani (*L.*). — [R 8] Sul moto medio dei nodi nel problema dei tre corpi [Sur le mouvement moyen des nœuds dans le problème des trois corps] (1089-1137).

Pour le point représentatif de la solution générale du système

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y,$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y,$$

à coefficients périodiques. M. Levi-Civita (*Ann. de l'École Norm. sup.*, t. XXVIII, 1911) a démontré l'existence du mouvement moyen asymptotique, et en a déduit le mouvement moyen du nœud dans le cas relatif à la théorie de la Lune. L'auteur démontre que les nœuds ont aussi un mouvement moyen asymptotique dans le cas général, pourvu que les trois corps s'éloignent peu d'un plan fixe.

Favaro (*A.*). — [V 7] Per la storia della Accademia del Cimento [Pour l'histoire de l'Académie del Cimento] (1173-1178).

Lori (*F.*). — [T 7 *c*] Alcuni fenomeni relativi alle lunghe linee di trasmissione [Sur certains phénomènes relatifs aux longues lignes de transmission] (1191-1198).

Silva (*G.*) e *Padova* (*E.*). — [U] Osservazioni sulle comete 1911 *b*, *c*, *e*, *f*, *g* fatte nella specola di Padova [Observations sur les comètes 1911 *b*, *c*, *e*, *f*, *g* faites à l'Observatoire de Padoue] (1307-1330).

Tome LXXII, 1912-1913.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXIX. Vincenzo Viviani (con ritratto) [Amis et correspondants de Galilée : XXIX. Vincent Viviani (avec portrait)] (1-155).

Burali-Forti (*C.*). — [B 12] Sopra alcuni operatori lineari vettoriali [Sur certains opérateurs linéaires vectoriels] (265-276).

Bottasso (*M.*). — [O 5 *h*] Le curvature negli inviluppi di rette e di piani con applicazione alle polari reciproche di una linea data [Les courbures dans les enveloppes de droites et de plans, avec application aux polaires réciproques d'une courbe donnée] (281-307).

Applications du calcul vectoriel.

Cisotti (*U.*). — [T 2] Sulle deformazioni isostatiche a reticolato cartesiano [Sur les déformations isostatiques à réseau cartésien] (391-404).

En tout point d'un milieu électrique, il y a trois éléments orthogonaux à chacun desquels les efforts intérieurs sont perpendiculaires. Ces éléments, considérés en tous les points du milieu, ne forment un système triple orthogonal que sous certaines conditions. L'auteur étudie le cas où le système triple est formé par des plans.

Parvopassu (*C.*). — [T 2] Intorno alle linee d'influenza relative alle travi elastiche. Nota I [Sur les lignes d'influence relatives aux poutres élastiques. Note I] (573-601).

Severi (*F.*). — [M_2 8] Un teorema d'inversione per gli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica [Sur un théorème d'inversion pour les intégrales simples de première espèce, appartenant à une surface algébrique] (765-772).

Si, sur une surface F d'irrégularité $p > 0$, on prend un point x, la condition imposée aux p intégrales simples de première espèce de F, de prendre en d'autres points de F des valeurs respectivement congruentes à celles qu'elles prennent en x, est algébrique. On a deux cas :

1. Si les p intégrales prennent les mêmes valeurs en un nombre fini m de points, les ∞^2 groupes de m points forment une involution de même irrégularité p que la surface F.

2. Si les p intégrales prennent les mêmes valeurs en un nombre infini de points, les ∞ courbes algébriques sur lesquelles les p intégrales sont constantes forment un faisceau de genre p.

Guareschi (*G.*). — [D 6] Sul sistema fondamentale delle grandezze intiere di un corpo di funzioni algebriche di due variabili, i cui coefficienti appartengono ad un corpo chiuso [Sur le système fondamental des grandeurs entières d'un corps de fonctions algébriques de deux variables, dont les coefficients appartiennent à un corps fermé [817-822].

Soient A un corps fermé, Ω le corps constitué par toutes les fonctions rationnelles de deux indéterminées x_1, x_2, ayant pour coefficients des quantités de A ; et soit K un corps algébrique supérieur à Ω et d'ordre n par rapport à ce dernier. Alors on peut trouver en K des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que toute quantité entière du corps s'exprime par

$$u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n,$$

$u_1, \ldots, u_n$ étant des fonctions rationnelles entières quelconques appartenant à Ω.

Comessatti (*A.*). — [K 22] Alcune osservazioni teorico-pratiche di fotogrammetria illustrate da un esempio [Quelques observations théorico-pratiques de photogrammétrie illustrées par un exemple] (865-892, 7 planches).

Da Rios (*L.-S.*). — [S 3 *b* α] Sul profilo verticale del thalweg per alvei curvilinei a fondo mobile [Sur le profil vertical du thalweg pour des lits curvilignes à fond mobile] (949-955).

De Stefani (*A.*). — [J 2 *g*] Velocità e giacenza della moneta. Analisi dei due concetti (957-969); caratteristiche notevoli (1191-1201) [Mouvement rapide et stase de la monnaie. Analyse des deux concepts (957-969); caractéristiques remarquables (1191-1201)].

Di Faccio (*A.*). — [S 2 *c*] Sulle lamine vorticose in seno a un liquido perfetto [Sur les lames tourbillonnaires dans un liquide parfait] (971-988).

Favaro (*A.*). — [V 7] Studi e ricerche per una iconografia galileiana [Études et recherches pour une iconographie galiléenne] (995-1051).

Molinari (*A.-M.*). — [C 2 *h*] A proposito di un teorema sugli integrali definiti impropri [A propos d'un théorème sur les intégrales définies impropres] (1125-1131).

Comessatti (*A.*). — [M₁ 2] Sui gruppi di r punti comuni ad r serie lineari di dimensione $r-1$ [Sur les groupes de r points communs à r séries linéaires de dimension $r-1$ (1134-1141).

Albenga (*G.*). — [D 1 *b*] Su di alcune applicazioni di serie trigonometriche alle determinazione di linee elastiche [Sur quelques applications de séries trigonométriques à la détermination de lignes élastiques] (1183-1189).

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [J 2 *g*] Delle rendite vitalizie su n teste [Sur les rentes viagères sur n têtes] (1203-1226).

Da Rios (L.-S.). — [S 3 b α] Sulla stabilità del regime dei corsi d'acqua ad asse curvilineo [Sur la stabilité du régime des cours d'eau à axe curviligne] (1293-1302).

Levi-Civita (T.). — [H 9] Sulla trasformazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine [Sur la transformation des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre] (1331-1357).

La question de la possibilité de transformer l'équation

$$E(u) = \Sigma_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \, \partial x_s} + \Sigma_r B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0$$

en l'autre

$$E'(u) = \Sigma_{rs} A'^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_r \, \partial x'_s} + \Sigma_r B'_r \frac{\partial u}{\partial x'_r} = 0$$

se réduit, par l'application des méthodes du calcul différentiel absolu de M. Ricci, à la détermination des invariants relatifs à une forme différentielle quadratique avec des invariants et systèmes covariants associés.

Si un certain invariant J n'est pas nul, l'équation peut se mettre sous la forme

$$\Delta_2 u + \frac{du}{d\sigma} = 0,$$

le paramètre Δ_2 étant relatif à une certaine forme

$$ds^2 = \Sigma a_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

et $d\sigma$ étant un certain élément ds déterminé pour chaque point x_1, x_2.

Pour J = 0, on a trois types. L'un d'eux se classifie comme les formes différentielles quadratiques auxquelles sont associés deux invariants j_1, j_2. Les autres deux types peuvent se réduire respectivement aux formes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u\right) = 0.$$

Cecconi (A.). — [C 4] Sistemi doppi covarianti a sistema derivate nullo, associati ad una forma differenziale binaria [Systèmes doubles covariants, à système dérivé nul, associés à une forme différentielle binaire] (1435-1439).

On connaît :

A. Le système des coefficients a_{rs};

B. Le système des éléments ε_{rs}, défini par

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,$$
$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{a};$$

C (en supposant que la forme fondamentale soit de classe zéro). Les systèmes qui, en substituant aux x les variables qui rendent la f canonique, se changent en systèmes à éléments constants.

L'auteur démontre qu'il n'y en a pas d'autres.

Tome LXXIII, 1913-1914.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXX. Niccolo Aggiunti [Amis et correspondants de Galilée : XXX. Nicolas Aggiunti] (1-77).

Favaro (*A.*). — [V 7] Nuove ricerche per una iconografia galileiana [Nouvelles recherches pour une iconographie galiléenne] (105-134).

Tonolo (*A.*). — [S 3 *b*] Nuova risoluzione del problema delle onde di Poisson-Cauchy [Nouvelle résolution du problème des ondes de Poisson-Cauchy] (545-571).

Le problème étant réduit à trouver une fonction $f(z, t)$, intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = ig\frac{\partial f}{\partial z},$$

l'auteur emploie la méthode de M. Volterra et trouve la solution sous la forme d'intégrale définie.

Bompiani (*E.*). — [N ref. Q 2] Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni [Contribution à l'étude des systèmes de droites dans l'espace à quatre dimensions] (579-616).

Un complexe

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, p_{ik} = 0 \qquad (a_{ik} + a_{ki} = 0, \quad a_{ii} = 0)$$

fait correspondre à tout point x un plan ξ dont les coordonnées sont

$$\xi_h = \Sigma_i a_{hi}\, x_i,$$

et si les points x, y qui déterminent la droite p sont infiniment rapprochés, on peut prendre

$$p_{ik} = x_i\, dx_k - x_k\, dx_i$$

et l'équation du complexe est

$$\Sigma \xi_h\, dx_h = 0$$

(équation pfaffienne liée au complexe).

Une courbe est *appartenant* au complexe lorsque ses tangentes y appartiennent, et elle est par conséquent une courbe intégrale de l'équation pfaffienne. Ces courbes ont des propriétés remarquables. Il y a aussi des surfaces sur lesquelles une famille de caractéristiques appartient au complexe. L'étude de ces surfaces conduit à des cas nouveaux d'intégrabilité de l'équation de Laplace. Dans la seconde Partie du travail, l'auteur étudie les groupes de transformations appartenant au complexe ou aux systèmes subordonnés.

De Stefani (*A.*). — [J 2 *g*] L'ofelimità del danaro [L'ophélimité de l'argent] (617-638).

Cecconi (*A.*). — [C 4] Sistemi covarianti di ordine qualunque a sistema derivato nullo, associati ad una forma differenziale binaria [Systèmes covariants d'ordre quelconque à système dérivé nul, associés à une forme différentielle binaire] (639-647).

Si la forme est de la classe zéro, le système général d'ordre n à système dérivé nul est formé par la somme de 2^n termes à coefficients constants, qui sont tous les produits des systèmes simples ayant le système dérivé nul et l'invariant algébrique $= 1$.

Si la forme est de la première classe, il n'y a pas de systèmes d'ordre impair dont le dérivé soit nul. Pour ceux d'ordre pair, l'auteur donne une méthode de détermination.

Toscano (*S.-A.*). — [O 2 *g* ref. B 12] Evolutoidi ed evolventoidi delle curve piane [Développoïdes et développantoïdes des courbes planes] (667-680).

Enveloppe des droites rencontrant une courbe sous un angle constant, et trajectoires orthogonales de ces enveloppes. Application du calcul vectoriel.

Signorini (*A.*). — [S 2 *e*] Moto di un punto soggetto a resistenza idraulica e forza di richiamo [Mouvement d'un point soumis à une résistance hydraulique et à une force d'attraction] (803-858).

Mouvement oscillatoire correspondant à une équation de la forme

$$mx'' + 2kx' + \omega^2 x = 0,$$

x étant la distance du point au centre d'attraction. La durée de l'oscillation a, pour $t = \infty$, la limite

$$\frac{\sqrt{m\pi}}{\omega},$$

où m est la masse du point et ω^2 la force d'attraction.

Dans l'hypothèse d'une petite résistance, une correspondante approximative donne une expression de x en fonction de t, dépendant de l'inversion d'une intégrale elliptique.

Enfin l'auteur examine les cas de $m = 0$ et de $\omega = 0$.

Levi-Civita (*T.*). — [T 9 *a*] Sforzo di regime e sforzo di avviamento pei veicoli trainati [Effort de régime et effort d'achemi-nement pour les véhicules traînés] (931-946).

Montalti (*M.*). — [H 4 *j*] Sulla riduzione dei sistemi differenziali con particolare riguardo ai sistemi canonici [Sur la réduction des systèmes différentiels et particulièrement des systèmes canoniques] (1109-1133).

Le but de l'auteur est d'unifier les deux procédés de réduction, dont l'un vise à l'abaissement de l'ordre dans la recherche de l'intégrale générale et l'autre à la construction de solutions particulières.

Le système

$$\frac{dy_i}{dx} = Y_i(x; y_1, \ldots, y_\mu; z_1, \ldots, z_\nu),$$
$$\frac{dz_h}{dx} = Z_h(x; y_1, \ldots, y_\mu; z_1, \ldots, z_\nu)$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ h = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

est équivalent à l'autre système auxiliaire aux différentielles totales

$$\frac{dy_i}{dx} = Y_i,$$
$$dz_h = \left(Z_h - \sum_1^\mu {}_j \lambda_{hj} Y_j\right) dx + \sum_1^\mu {}_j \lambda_{hj}\, dy_j.$$

La considération de ce système auxiliaire et l'usage des intégrales de ligne donnent une généralisation des deux procédés mentionnés.

Pour les systèmes canoniques, le système auxiliaire s'obtient par la variation d'une intégrale qui est une extension du principe de l'action stationnaire.

Gini (*C.*). — [J 2 *g*] Sulla mesura della concentrazione e della variabilità dei caratteri [Sur la mesure de la concentration et de la variabilité des caractères] (1203-1248).

De Stefani (*A.*). — [J 2 *g*] I criteri economici subiettivi per la determinazione quantitativa delle ricchezza [Les critériums économiques subjectifs pour la détermination de la richesse] (1553-1562).

Tome LXXIV, 1914-1915.

Favaro (*A.*). — [V7] Presentando una traduzione inglese dei *Dialoghi della Nuova Scienza* [En présentant une traduction anglaise des *Dialoghi della Nuova Scienza*] (33-39).

Gini (*C.*). — [J2*g*] Di una misura delle dissomiglianza fra due gruppi di quantità e delle sue applicazioni allo studio delle relazioni statistiche [Sur une mesure de la dissimilitude entre deux groupes de quantités et sur ses applications à l'étude des relations statistiques] (185-213).

Favaro (*A.*). — [V7] Nuove contribuzioni ad una iconografia galileiana [Nouvelles contributions à une iconographie galiléenne] (305-317).

Andreoli (*G.*). — [H11] Sulla calibrazione dei tubi termometrici e le equazioni funzionali [Sur la calibration des tubes thermométriques et sur les équations fonctionnelles] (319-325).

On est conduit à des équations intégrales.

Signorini (*A.*). — [S2*e*] Sul moto di un sistema olonomo soggetto a resistenza idraulica e forza elastica [Sur le mouvement d'un système holonome soumis à une résistance hydraulique et à une force élastique] (327-340).

Dans la Note précédente (t. LXXIII, p. 803), l'auteur s'était borné à une dimension. Ici il étend ses résultats (comportement asymptotique du mouvement pour $t = \infty$) au mouvement d'un point dans un espace euclidien de n dimensions. Le mouvement présente un amortissement oscillatoire.

Cisotti (*U.*). — [H9*b*] Sulla equazione $\Delta_2\psi = \psi$ [Sur l'équation $\Delta_2\psi = \psi$] (455-464).

L'intégrale est exprimée en série de puissances de y, les coefficients étant des fonctions de x.

Gini (*C.*). — [J2*g*] Indici di omofilia e di rassomiglianza e loro relazione col coefficiente di correlazione e con gli indici di attrazione [Sur les indices d'homophilie et de similitude et leurs relations avec le coefficient de corrélation et avec les indices d'attraction] (583-610).

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXI. Bonaventura Cavalieri [Amis et correspondants de Galilée : XXXI. Bonaventure Cavalieri] (701-767).

Pietra (*G.*). — [J 2 *g*] Delle relazioni fra gli indici di variabilità [Sur les relations entre les indices de variabilité] : Note I (775-792), Note II (793-804).

Pascal (*A.*). — [V8] Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri [Sur une lettre inédite de Jérôme Saccheri] (863-820).

Datée de Pavie, 13 décembre 1726. Démonstration relative à une construction de trisection.

Levi-Civita (*T.*). — [U 9] Sulla riduzione del problema dei tre corpi [Sur la réduction du problème des trois corps] (907-939).

L'auteur perfectionne la méthode dans le but de rendre plus clairs certains passages intermédiaires. Il introduit comme coordonnées du système deux angles θ, ψ pour déterminer le plan des corps par rapport au plan invariable, et six coordonnées cartésiennes pour les trois corps dans leur plan. Au moyen de l'intégrale des aires, il obtient la réduction à six degrés de liberté, ce qui est particulièrement utile pour la comparaison avec le cas où les trois corps restent toujours dans le même plan. Par les intégrales des quantités de mouvement, il obtient l'ultérieure réduction à quatre degrés de liberté et les équations de Whittaker. Pour les solutions de Lagrange (triangles équilatéraux), il trouve que l'intersection du plan des corps avec le plan invariable tourne (non uniformément) avec un mouvement moyen égal au double de la vitesse angulaire de chacun des corps.

Rossi (*L.-V.*). — [R 9] Sulle condizioni di stabilità dei muri con larghe aperture [Sur les conditions de stabilité des murs avec de larges ouvertures] (1029-1068, 3 planches).

Tonolo (*A.*). — [D 1 *bα*] Sullo sviluppo di una funzione in serie di Fourier [Sur le développement d'une fonction en série de Fourier] (1253-1258).

Andreoli (*G.*). — [H 11] Su alcune equazioni integro-differenziali lineari a due e più variabili [Sur certaines équations intégro-différentielles linéaires à deux et à plusieurs variables] (1265-1274).

L'équation considérée est

$$\sum_0^m h_r(x)\frac{\partial^r \varphi(x, y)}{\partial y^r} + \int \sum_0^n \mathrm{M}_s(x, \xi)\frac{\partial^s \varphi(\xi, y)}{\partial y^s}\, d\xi = g(x, y),$$

où $\varphi(x, y)$ est la fonction à déterminer.

Cisotti (U.). — [S 3*a*] Sulla contrazione delle vene liquide [Sur la contraction des veines liquides] (1499-1509).

Favaro (A.). — [V 7] Quarant' anni di studi galileiani (1876-1915) [Quarante ans d'études galiléennes (1876-1915)] (1615-1658).

Silva (G.). — [U] Sulla determinazione della irregolarità dei perni di un cerchio meridiano [Sur la détermination de l'irrégularité des pivots d'un cercle méridien] (1659-1684).

Comessatti (A.). — [M_1 2] Limiti di variabilità della dimensione e dell' ordine d'una g_n^r sopra una curve di dato genere [Limites de variabilité de la dimension et de l'ordre d'une g_n^r sur une courbe de genre donné (1685-1709).

Si ρ, τ sont deux entiers, définis par les inégalités

$$\frac{2p-2}{n} < \rho \leqq \frac{2p-2}{n} + 1,$$

$$\tau(\tau-1) < \frac{2p}{r-1} < \tau(\tau+1),$$

on a

$$r \leqq \frac{2\rho(n-1) - 2p}{\rho(\rho+1)} + 1.$$

$$n \geqq \frac{\tau+1}{2}(r-1) + \frac{p}{\tau} + 1.$$

Boggio (T.). — [R 1] Sulla formola fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi [Sur la formule fondamentale de la cinématique des systèmes rigides] (1795-1799).

Étant M, N deux points du système et M', N' leurs vitesses, on a

$$\mathrm{M}' = \mathrm{N}' + \Omega \wedge (\mathrm{M} - \mathrm{N}),$$

Ω étant un vecteur (vitesse angulaire instantanée) qui ne dépend que du temps. La démonstration est fondée sur l'identité suivante, établie par Pieri

entre trois vecteurs p, q, r non complanaires et un vecteur quelconque u :

$$p \times q \wedge r . u = u \times p . q \wedge r + u \times q . r \wedge p + u \times r . p \wedge q.$$

Gini (*C.*). — [J 2 *g*] Nuovi contributi alla teoria delle relazioni statistiche [Nouvelles contributions à la théorie des relations statistiques] (1903-1942).

Cecconi (*A.*). — [R 7 *b*] Sul moto di un punto attratto da più centri mobili con legge nota [Sur le mouvement d'un point attiré par plusieurs centres mobiles selon une loi connue (2053-2069).

Tome LXXV, 1915-1916.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXIII. Mattia Bernegger [Amis et correspondants de Galilée : XXXIII. Mathias Bernegger (29-53).

Favaro (*A.*). — [V 7] Nuovi materiali per una iconografia galileiana [Nouveaux matériaux pour une iconographie galiléenne] (55-64).

Marzolo (*F.*). — [S 3 *b*] Le accelerazioni perturbatici nello studio delle correnti a regime gradualmente variato [Sur les accélérations perturbatrices dans l'étude des courants à régime graduellement varié] (267-297).

Da Rios (*L.-S.*). — [S 2 *c*] Sezioni trasversali stabili dei filetti vorticosi [Sections transversales stables des filets tourbillonnaires] (299-308).

Gini (*C.*). — [J 2 *g*] Sul criterio di concordanza fra due caratteri [Sur le critérium de concordance entre deux caractères] (309-331).

Levi-Civita (*T.*). — [R 6 *b* β] Sulla introduzione di vincoli olonomi nelle equazioni dinamiche di Hamilton [Sur l'introduction de liaisons holonomiques dans les équations dynamiques de Hamilton] (387-395).

Étant donné un système S conservatif et en introduisant de nouveaux liens

holonomes, on obtient un système S'. La construction des équations du mouvement sous forme canonique implique la détermination de la nouvelle fonction H'. L'auteur donne un procédé simple pour déterminer H' en fonction de la H (du système S) et des équations des liens.

Palatini (*A.*). — [S 2 *d*] Sulla confluenza di due vene [Sur la confluence de deux veines] (451-468).

Favaro (*A.*) — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXIV-XXXVI. Bonaventura, Abramo e Lodovico Elzevir [Amis et correspondants de Galilée : XXXIV-XXXVI. Bonaventure, Abram et Ludovic Elzevir] (481-514).

Favaro (*A.*). — [V 5 *b*] Pietro d'Abano ed il suo *Lucidator astrologiæ* [Pierre d'Abano et son *Lucidator astrologiæ*] (515-527).

Lori (*F.*). — [T 7 *c*] Un' espressione dell' energia elettromagnetica in funzione di elementi locali [Une expression de l'énergie électromagnétique en fonction d'éléments locaux] (819-826).

Conti (*C.*). — [S 2] Sopra un criterio di distinzione del moto potenziale nei fluidi [Sur un moyen de distinguer le mouvement potentiel dans les fluides] (975-985).

Da Rios (*L.-S.*). — [S 3 *b* α] Sopra una speciale concezione del fenomeno fluviale [Sur une manière spéciale de concevoir le phénomène fluvial] (1001-1021).

De Stefani (*A.*). — [J 2 *g*] Le alternanze dei massimi e dei minimi nei fenomeni collettivi [Sur les alternances des maxima et des minima dans les phénomènes collectifs] (1023-1027).

Rossi (*L.-V.*). — [R 9 *c*] Intorno al problema della resistenza nei terreni per fondazioni [Sur le problème de la résistance dans les terrains pour fondations] (1061-1088).

Severi (*F.*). — [N_4 2] Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche [Sur les fondements de la

géométrie énumérative et sur la théorie des caractéristiques] (1121-1162).

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXVII. Mario Guiducci [Amis et correspondants de Galilée : XXXVII. Marius Guiducci] (1357-1418).

Gini (*C.*). — [J 2g] Indici di concordanza [Indices de concordance] (1419-1461).

Del Vecchio (*E.*). — [H9] La soluzione fondamentale per

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

[La solution fondamentale pour

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0]$$

(1529-1558).

Propriétés de la fonction

$$E_1(\xi - x, \eta - y) = \int_0^{+\infty} d\mu \cos[\mu^3(\eta - y) - \mu(\xi - x)].$$

Burali-Forti (*C.*). — [$M_1$8] Sulla curva di caccia [Sur la courbe de poursuite] (1589-1597).

Tome LXXVI, 1916-1917
(9e série, t. I).

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXVIII. Marino Mersenne [Amis et correspondants de Galilée : XXXVIII. Marin Mersenne] (35-92).

Palatini (*A.*). — [T 2] Sulle quadriche di deformazione per gli spazi S_3 [Sur les quadriques de déformation pour les espaces S_3] (125-148).

Étant

$$ds^2 = \Sigma a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

l'élément linéaire de l'espace S_n et

$$\psi = \Sigma \xi_{rs}\, x_r\, x_s$$

une quadrique, les conditions pour que celle-ci puisse se prendre comme qua-

drique de déformation, ont été trouvées par de Saint-Venant et Beltrami et généralisées par Padova et Ricci. L'auteur traite le problème pour les S_3 doués de groupes transitifs de mouvements rigides à quatre et à trois paramètres.

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D1] Del massimo e del minimo di una funzione continua, limite d'una successione di funzioni continue [Sur le maximum et le minimum d'une fonction continue, limite d'une succession de fonctions continues] (301-309).

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XXXIX. Nicolo Fabri di Peirasc [Amis et correspondants de Galilée : XXXIX. Nicolas Fabri di Peirasc] (591-636).

Da Rios (*L.-S.*). — [S2*e*] Sulla trazione di natanti aerei e subacquei [Sur la traction de corps flottants dans l'air et sous l'eau] (855-865).

Serini (*R.*). — [J2*g*] Sulle legi ereditarie che conservano i massimi. Nota I [Sur les lois d'hérédité qui conservent les maxima. Note I] (1103-1115).

Gini (*C.*). — [J2*g*] Delle relazioni tra le intensità cograduate di due caratteri [Sur les relations entre les intensités cograduées de deux caractères] (1147-1185).

Marletta (*G.*). — [K7 ref. Q2] Preliminari di geometria proiettiva ad infinite dimensioni [Préliminaires de géométrie projective à un nombre infini de dimensions] (1187-1197).

Un espace linéaire à un nombre infini de dimensions est de *rang* fini lorsqu'on peut fixer un nombre *r* tel que, pour $n \geq r$, tout S_n ait au moins un point commun avec l'espace donné. De tels espaces existent, comme l'auteur l'a prouvé (*Atti dell' Acc. Gioenia di Catania*, 5e série, vol. X, 1916). Ici il expose les propriétés fondamentales de ces espaces : projections, sections, perspective, homologie, etc.

Ronchi (*M.*). — [U9] Sulla riduzione esplicita del problema dei tre corpi [Sur la réduction explicite du problème des trois corps] (1221-1235).

Tome LXXVII, 1917-1918
(9e série, t. II).

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei : XL. Giuseppe Moletti [Amis et correspondants de Galilée : XL. Joseph Moletti] (47-118).

Signorini (*A.*). — [S 6 *b*] Sul moto dei proiettili di bombarda [Sur le mouvement des projectiles de bombarde] (119-148, une planche).

Favaro (*A.*). — [V 7] Intorno alla prima edizione fiorentina delle Opere di Galileo [Sur la première édition florentine des Œuvres de Galilée] (229-242).

Burali-Forti (*C.*). — [M_2 7 *c*] Rigate sviluppabili con assegnato côno direttore o con assegnata direttrice [Sur les surfaces développables ayant un cône directeur donné ou une directrice donnée] (303-316).

Application du calcul vectoriel.

Bordiga (*G.*). — [Q 2] La varietà rigata, di dimensione, ordine e classe $n+1$ nello spazio $(2n+1)$, per lo studio dell' omografia spaziale [Sur la variété réglée, de dimension, ordre et classe $n+1$ dans l'espace $(2n+1)$, pour l'étude de l'homographie des espaces] (317-357).

Dans un espace S_{2n+1} on prend trois espaces S'_n, S''_n, S'''_n indépendants (espaces *directeurs*); par un point de l'un d'eux, on peut conduire une (seule) droite a incidente aux deux autres. Le lieu des droites a (incidentes aux trois espaces S'_n, S''_n, S'''_n) est la variété dont il s'agit et dont l'auteur étudie les propriétés. Il étudie aussi deux systèmes de courbes rationnelles normales existant sur la variété, il détermine l'ordre et la classe de celle-ci et en fait la représentation sur un espace S_{n+1}. Les propriétés trouvées sont aussi appliquées par lui à l'étude de l'homographie dans S_n, et l'intersection de la variété avec un S_n conduit à une classification de ces homographies.

Gini (*C.*). — [J 2 *g*] Di una estensione del concetto di scostamento medio e di alcune applicazioni alla misura della variabilità dei caratteri qualitativi [Sur une extension de la notion d'écart moyen et sur quelques applications à la mesure de la variabilité des caractères qualitatifs] (397-461).

Bottasso (M.). — [$M_2 7c$] Sulle rigate sviluppabili passanti per una linea e per le sue trasformate di Combescure [Sur les développables réglées passant par une ligne donnée et par ses transformées de Combescure] (479-485).

Application du calcul vectoriel.

S. Rindi.

ERRATA.

2ᵉ série, Tome XXXV, 1911, 2ᵉ Partie :

Page 17, ligne 6 en remontant, *au lieu de* 1908, *lire* 1905 (c'est-à-dire *lire* Analyse du *J. M. P. A.*, année 1905).

2ᵉ série, Tome XLII, 1918, 2ᵉ Partie :

Page 14, ligne 9, *au lieu de* Tome XXXVIII, 1907, *lire* Tome XXXIX, 1908.

A la Table alphabétique des Matières, *au lieu de* Atti del R. Istituto veneto.... T. XLIV, 1904-1905, *lire* T. LXIV, 1904-1905 à T. LXVII, 1907-1908.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLIII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLIII; 1919. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

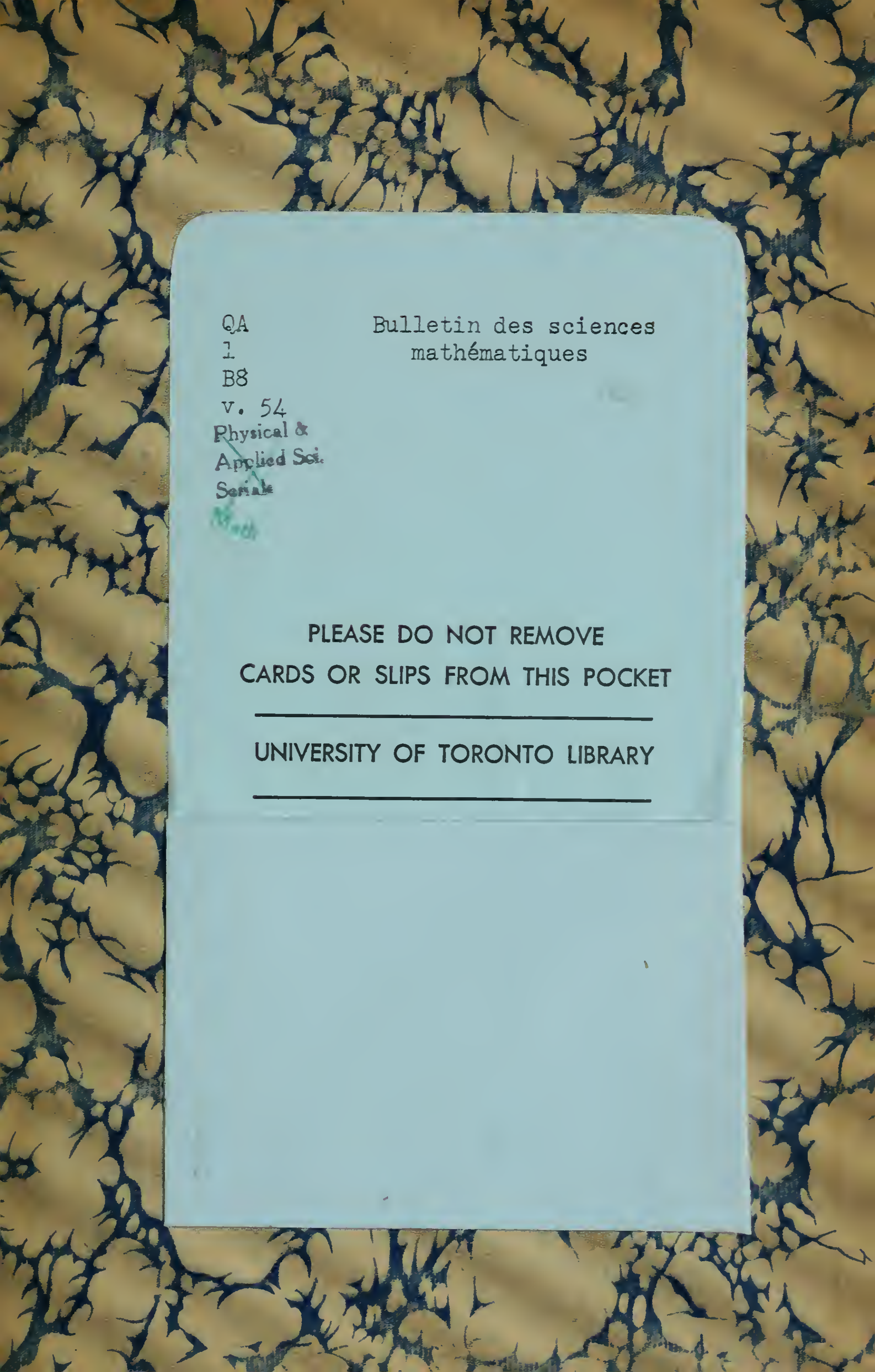
TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
59615-20





QA
1
B8
v. 54
Physical &
Applied Sci.
Serials
Bulletin des sciences
mathématiques
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

